IFTATX
XXI ASRDA ILM-FAN TARAQQIYOTINING ASOSIY TENDENSIYALARI VA XUSUSIYATLARI
DENOV, 10-OKTABR 2025 YIL
in-academy.uz

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ С НЕПОЛНЫМ УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

MIRSABUROV MIRAHMAT
Termiz davlat universiteti
“Matematik analiz ”kafedrasi professori
Fizika-matematika fanlari doktori (DSc)
Email: mirsaburov@mail.ru
RO‘ZIYEVA ZUHRA FAXRIDDINOVNA
Denov tadbirkolik va pedagogika instituti
“Oliy matematika” kafedrasi 1-kurs doktoranti
Email: zuxraruziyeva00@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.17297281

Аннотация: В работе, в некоторой неограниченной области для уравнения смешанного типа с особыми коэффициентами доказана корректность задачи с непольным условием типа условия Бицадзе-Самарского на части граничной характеристики и на части отрезка вырождения и аналога условия Франкля на отрезке вырождения.Единственность решения задачи доказана с помошью принципа екстремума А.В.Бицадзе.При доказательстве существования решения задачи используется теория сингулярных интегральных уравнений и теория уравнений Винера-Хопфа.

Ключевые слова: Уравнение смешанного типа, сингулярный коэффициент, условие Бицадзе-Самарского, единственность решения, существование решения сингулярное интегральное уравнение, задача о скачке, уравнение Винера-Хопфа, индекс.

ON THE UNIQUENESS OF A PROBLEM WITH THE INCOMPLETE BITSADZE-SAMARSKII CONDITION FOR A MIXED-TYPE EQUATION

Abstract: In this paper, the correctness of a boundary value problem for an equation of mixed type with singular coefficients in an unbounded domain is established. The problem is considered with an incomplete condition of the Bitsadze–Samarskii type on part of the boundary characteristic and part of the degeneration segment, as well as with an analogue of the Frankl condition on the degeneration segment. The uniqueness of the solution is proved using A.V. Bitsadze’s extremum principle. The existence of the solution is established by employing the theory of singular integral equations and the Wiener-Hopf equations.

Keywords: mixed-type equation, singular coefficient, Bitsadze–Samarskii condition, uniqueness of solution, existence of solution, singular integral equation, jump problem, Wiener–Hopf equation, index.

ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN BITSADZE–SAMARSKOGO TO‘LIQSIZ SHARTI BILAN MASALANING YAGONALIGI HAQIDA

Annotatsiya: Ushbu ishda ayrim cheksiz sohada maxsus koeffitsientlarga ega aralash tipdagi tenglama uchun masalaning to‘liqsiz sharti sifatida chegaraviy xarakteristikaning bir qismida va degeneratsiya kesmasining bir qismida Bitsadze–Samarskogo shartiga o‘xshash shart, hamda degeneratsiya kesmasida Frankl shartining analogi qo‘llanilib, masalaning

korrektligi isbotlangan. Masalaning yechimining yagonaligi A.V. Bitsadzening ekstremum prinsipi yordamida isbotlangan. Yechim mavjudligini isbotlashda singulyar integral tenglamalar nazariyasi va Viner–Xopf tenglamalari nazariyasi qo'llanilgan.

Kalit so'zlar: aralash tipdagi tenglama, singulyar koeffitsient, Bitsadze–Samarskogo sharti, yechimning yagonaligi, yechim mavjudligi, singulyar integral tenglama, sakrash masalasi, Viner-Xopf tenglamasi, indeks.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] А.В. Бицадзе и А.А. Самарским для уравнения Лапласа в прямоугольной области впервые была сформулирована и исследована задача с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения на части границы области со значением на отрезке внутренней прямой, в точках которой искомая функция удовлетворяет уравнению.Первая нелокальная задачи для смешанного типа с аналогом условия Бицадзе-Самарского на характеристике и на отрезке вырождения была исследована в работе Смирнова М.М [2, 223].Задача с неполным условием Бицадзе-Самарского на части отрезка вырождения исследована в работе [3]. Доказательству корректности задач для уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на часта граничной характеристике и параллельной ей внутренней характеристике посвяшены работих [4],[5]. Задачи с условием Бицадзе-Самарского исследованы в работих [6],[7],[8].

Настоящая работа посвящена исследованию в неограниченной области, задачи с неполным условием Бицадзе-Самарского и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для уравнение смешшанного типа с особыми коэффициентами.

Постановка задачи BSF (Бицадзе, Самарского, Франкля).

Пусть $D = D^{+} \bigcup D^{-} \bigcup J$ -неограниченная смешанная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, где D^{+} -полуплоскость $y > 0$, D^{-} -конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками уравнения

$$(signy)|y|^{m} u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, (1)$$

исходяшими из точек $A(-1,0), B(1,0)$ прямой $y = 0.$ J=(-1,1)-интервал оси $y = 0.$ В уравнение (1) предполагается, что m, α_0 и β_0 некоторые действительные числа, удовлетворяюшие условиям $m > 0$, $|\alpha_0| < (m+2)/2, \quad -m/2 < \beta_0 < 1.$

Заметим, что конструктивные, функциональные и дифференциальные свойства решений уравнения (1) существенно зависять от числовых параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения. На плоскости параметров α_0 и β_0 рассматривается треугольник $A_0^* B_0^* C_0^*$ ограниченный прямыми

$$A_0^* C_0^* : \beta_0 + \alpha_0 = -m/2,\ B_0^* C_0^* : \beta_0 - \alpha_0 = -m/2,\ A_0^* B_0^* : \beta_0 = 1,$$

и в зависимости от местонахождения точки $P(\alpha_0, \beta_0)$ в этом треугольнике формулируются и исследуются задачи для уравнения (1)[5],[9].

Рассмотрим случай $P(\alpha_0, \beta_0) \quad \Delta A_0^* B_0^* C_0^*$,.Обозначим через C_0 и C_1 точки пресечения граничних характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходяшими из точки $E(c,0)$,где с -некоторое число,принадлежашее интервалу J=(-1,1) оси $y=0$ Пусть $p(x) \quad C^1[-1,c]$ -диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ во множества точек отрезка $[c,1]$,причем $p'(x)$ <0, $p(-1)=1$, $p(c)=c.$ В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x)=d-kx$, где $k=\dfrac{1-c}{1+c},\ d=\dfrac{2c}{1+c}$. В задачах типа задачи Бицадзе-Самарского [6.с.223] нелокальное условие связывает значения дробной производной искомий функции на характеристике AC со значением искомий функции на отрезке вырождения AB .В настояшей работе в неограниченной области D для уравнения (1) исследуется корректность задачи, где граничная характеристика AC произвольним оброзем делится на две части: AC_0 и C_0C и на первой части $AC_0 \quad C_0C$ и на части отрезка вырожления $AE \quad AB$ задается нелокальное условие типа условия Бицадзе-Самарского [2.с.223]. Здесь вторая часть C_0C характеристики AC освобождена от краевах условий и это недостаюшее нелокальное условие заменаю аналогом условия Франкля [1],[9]-[10], на отрезке вырождения AB

Пусть D_R^+ -конечная область, отсекаемая от области D^+ дугой нормальной кривой σ_R с концами в точках $A_R = A_R(-R,0), B_R = B_R(R,0),$

$$\sigma_R : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = R^2, -R \quad x \quad R, 0 \quad y \quad \left((m+2)R/2\right)^{2/(m+2)}.$$

Введем обозначения: $J_1 = \{(x,y): - \quad < x < -1, y=0\}, J_2 = \{(x,y): 1 < x < + \quad , y=0\},$ $D_R = D_R^+ \quad D^- \quad J$, D_R -подобласть неограниченной области D.

Задача BSF. В неограниченной области D требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяюшим условиям :

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в любой подобласти $\overline{D}_R$ неограниченной области D;

2) $u(x,y)$ принадлежит пространству $C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобшенным решением класса R_1 [2.c.104], [11.c.35] в области D^-;

4) на интервале вырождения J имеет место следуюшее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}, x \quad J/\{c\}, (2)$$

причем эти пределы при $x\to\pm 1$, $x\to c,$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\alpha-\beta$, где $\alpha=(m+2(\beta_0+\alpha_0))/(2(m+2)), \beta=(m+2(\beta_0-\alpha_0))/(2(m+2)), \alpha>0, \beta>0, \alpha+\beta<1;$ 5) выполняется равенство

$$\lim_{R\to} u(x,y)=0, (3)$$

где $R^2=x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2};$

6) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x) \quad x \quad \overline{J}_1, u(x,0)=\varphi_2(x) \quad x \quad \overline{J}_2, (4)$$

$$D^{\alpha}_{-1,x}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u \quad \theta_0\left((x)\right) \quad =a(x)u(x,0)+b(x) \quad x \quad (-1,c), (5)$$

$$u\left(p(x),0\right)-\mu(x)u\left(x,0\right)=f(x), x \quad (-1,c), (6)$$

Введя обозначение $u(x,0)=\tau(x), x \quad \overline{J},$ условие (6) запишем в виде

$$\tau(p(x))-\mu(x)\tau(x)=f(x), x \quad \overline{J}. (6^*)$$

где $D^{l}_{-1,x}, -$ оператор дифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля.[6. с.16]

$$\theta_0(x)=\frac{x_0-1}{2}-i \quad \frac{(x_0+1)(m+2)}{4} \quad ^{2/(m+2)},$$

$\theta_0(x)$ -аффикс точки пересечения граничной характеристики AC с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, $x \quad (-1,c)$, где, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), a(x), b(x), \quad f(x)$ - заданные непрерывно дифференцируемие функции, в замыкании множества их определение, причем $\lim_{x\to -}\varphi_1(x)=0 \lim_{x\to +}\varphi_2(x)=0,$ Заметим, что условие (5) является неполным условием Бицадзе-Самарского [2. с.223], на характеристике AC_0 и на отрезке AE условие (6) есть аналог условия Франкля на отрезке вырождения AB

Вывод первого функционального соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Формула Дарбу, определяюшая в области D^{-} решение, для уравнения (1), видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,-0)=\tau(x),\ x\quad \bar{J};\ \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ x\quad J,$$

имеет вид [12, с.34]

$$u(x,y)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\tau\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt+$$

(7)

$$+\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{-\beta}(1+t)^{-\alpha}dt,$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}2^{1-\alpha-\beta},\ \gamma_2=-\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)2^{1-\alpha-\beta}}{(1-\beta_0)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}$$

В силу (7) нетрудно вычислить, что

$$u\left[\theta_0(x)\right]=\gamma_1\Gamma(\alpha)\left(\frac{1+x}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}D_{-1,x}^{-\alpha}(1+x)^{\beta-1}\tau(x)+$$

(8)

$$+\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(\frac{m+2}{2}\right)^{1-\alpha-\beta}D_{-1,x}^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha}\nu(x).$$

К соотношениям (8) соответственно применяя операторы $D_{-1,x}^{1-\beta}$ и $D_{-1,x}^{1-\alpha}$ с учетом тождеств

$$D_{-1,x}^{1-\beta}(1+x)^{1-\alpha-\beta}D_{-1,x}^{-\alpha}(1+x)^{\beta-1}\tau(p(x))=(1+x)^{-\alpha}D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(p(x)),$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta}D_{-1,x}^{\beta-1}(1+x)^{-\alpha}\nu(p(x))=(1+x)^{-\alpha}\nu(p(x)),$$

имеем

$$D_{-1,x}^{\alpha}(1+x)^{\alpha+\beta-1}u\left[\theta_0(x)\right]=\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)(1+x)^{\beta-1}}{2^{1-\alpha-\beta}}\tau(x)+\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1+x)^{\beta-1}}{((m+2)/2)^{\alpha+\beta-1}}D_{-1,x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x).(9)$$

В силу (9) из краевого условия (5) имеем

$$\frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)(1+x)^{\beta-1}}{2^{1-\alpha-\beta}}\tau(x)+\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1+x)^{\beta-1}}{((m+2)/2)^{\alpha+\beta-1}}D_{-1,x}^{\alpha+\beta-1}\nu(x)=a(x)\tau(x)+b(x).(10)$$

К соотношению(10) применяя оператор дифференцирования дробного порядка $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}$ получим

$$\nu(x) = D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta} a_1(x)\tau(x) + b_1(x), x \quad (-1,c), (11)$$

где

$$a_1(x) = \frac{2^{1-\alpha-\beta}(1+x)^{1-\beta}a(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)} - \frac{\gamma_1\Gamma(\alpha)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)},$$

$$b_1(x) = \frac{2}{m+2}^{1-\alpha-\beta} \frac{1}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)(1+x)^{\beta-1}} D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta} b(x),$$

соотношение (11) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенным на интервал $(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Единственность решения задачи BSF.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x) \quad 0, \varphi_2(x) \quad 0, b(x) \quad 0, f(x) \quad 0,$

$$a_1(x) > 0, a_1'(x) > 0, 0 < \mu(x) < 1, (12)$$

тогда решение задачи BSF в области $D^+ \bigcup J_1 \bigcup J \bigcup J_2$ -тождественно равно нулю.

Доказательство. Рассмотрим конечную область $D_R = D_R^+ \bigcup D^-$ Решение $u(x,y)$ задачи BSF рассмотрим в области D_R и покажем, что функция $u(x,y)$ удовлетворяюшее условиям теоремы 1 своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицатель- ного значения (НОЗ) в области $\overline{D_R^+}$ достигает на кривой σ_R. Пусть (x_0, y_0) -точка НПЗ функции $u(x,y)$ в области $\overline{D_R^+}$. В силу принципа Хопфа [13, с.25] функция $u(x,y)$ своего НПЗ во внутренних точках области D_R^+ не достигает, следовательно $(x_0, y_0) \quad D_R^+$. Допустим, что функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D_R^+}$ достигает на отрезке $[-R,R]$ -оси $y=0$.

Здесь расмотрим четыре случая возможного расположения точка $(x_0, 0)$ на отрезке $[-R,R]$ -оси $y=0$.

1. Пусть $x_0 \quad [-R,-1] \bigcup [1,R],$ так как на этих отрезках $\varphi_1(x) \quad 0, \varphi_2(x) \quad 0,$ тогда функция $u(x,y)$ своего НПЗ не достигает в этих точких т.е. $x_0 \quad [-R,-1] \bigcup [1,R];$

2. Пусть $x_0, \quad (-1,c).$ В этом случае в силу принципа экстремума для операторов дифференцирования дробного порядка $D_{a,x}^l$, $D_{x,b}^l$ т.е. В точке $x_0 -$ наибольшего

положительного значения (НПЗ) функции $\tau(x)$ имеем $D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}a_1(x)\tau(x)\Big|_{x=x_0}>0$ [2,с.19] отсюда следуют, что правая часть равенства (11) (с $b(x) \quad 0$) также строго положительна, следовательно его и левая часть так же положительна при $x=x_0,$ что в силу условия сопряжения (2) противоречить принципу Заремба - Жиро $\nu(x_0)>0$ [12.с.74]

3. Пусть $x_0 \quad (c,1).$ Тогда в силу (6)(с $f(x) \quad 0$), $\tau(p(x_0))=\mu(x_0)\tau(x_0)<\tau(x_0)$ где, $x_0 \quad (-1,c),\ \ p(x_0) \quad (c,1),\ \ 0<\mu(x)<1$. т.е значение функции $\tau(p(x_0))$ на EB меньше чем значение функции $\tau(x_0)$, на AE , следовательно функции $u(x,y)$ своего НПЗ не достигает и на интервале $EB,$ т.е $x_0 \quad (c,1).$

4. Пусть $x_0=c.$ С учетом $p(c)=c$ в силу $(6^*) \quad (c\, f(x) \quad 0)$ имеем $\tau(c)=\mu(c)\tau(c),$ $\tau(c)(1-\mu(c))=0,\ \ \tau(c)=0$ следовательно, точка $(c,0)$ не является точкой НПЗ функции $u(x,y)$ в области $\overline{D_R^+}$

Таким образом, из рассмотренных случаев возможного расположения точки $(x_0,0)$ на отрезке AB и принципа Хопфа заключаем, что решение $u(x,y)$ удовлетворяюших условиям (12) теоремы 1 своего НПЗ в области $\overline{D_R^+}$ достигает на нормальной кривой $\overline{\sigma_R}.$

Аналогичным методом как в случае НПЗ функции $u(x,y)$ доказывается, что функция $u(x,y)$ удовлетворяюшее условиям (12) теоремы 1 своего НОЗ также достигает на нормальной кривой $\sigma_R.$

Таким образом, решение $u(x,y)$ задачи BSF удовлетворяюшее условиям (12) теоремы 1 в области D_R^+ своего НПЗ и НОЗ достигает только в точках нормальной кривой $\overline{\sigma_R}$ отсюда и в силу (3), для $\forall\varepsilon>0$ существует такое $R_0(\varepsilon),$ что при $R>R_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|u(x,y)|<\varepsilon,(x,y) \quad \overline{\sigma_R},$$

и следовательно, это неравенство выполняется и в области $\overline{D_R^+}$, в силу произвольности R неравенство $-\varepsilon \quad u(x,y) \quad \varepsilon$ имеет место всюду на $D^+\bigcup J_1\bigcup J\bigcup J_2.$ Следовательно в силу произвольности $\varepsilon>0,$ при $R\to+$ заключаем, что $u(x,y) \quad 0$ в области $D^+\bigcup J_1\bigcup J\bigcup J_2.$ Теорема 1 доказана.

Следствие. Задача BSF может иметь не более одного решения. Действительно из теоремы 1 следует, что $u(x,y) \quad 0$ в $D^+\bigcup J_1\bigcup J\bigcup J_2$ отсюда

$$\lim_{y\to+0} u(x,y) \quad 0,\, x \quad (- \quad ,+ \quad),\ \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} \quad 0,\, x \quad (- \quad ,+ \quad).$$

Тогда в силу непрерывности искомого решения и условия сопражения (2) силу имеем

$$\lim_{y\to-0} u(x,y) \quad 0, \forall x \quad \bar{J},\ \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y} \quad 0, \forall x \quad J. (13)$$

Теперь в области D^- восстанавливая решение $u(x,y)$ с помошью формулы Дарбу (7) с нулевыми данными (13) получим, что $u(x,y) \quad 0$ и в области $\overline{D^-}$, следовательно $u(x,y) \quad 0$ в $\overline{D}$. Следствие доказано.

Adabiyotlar:

1. Франкль Ф. И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. – С. 196–202.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
3. Чориева С. Т. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского с условием Франкля на линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Известия вузов. Математика. 2013. № 5. – С. 51–60.
4. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 9. – С. 1281–1284.
5. Мирсабуров М., Туруев Р. Н. Задача в неограниченной области с условием Бицадзе–Самарского на части граничной характеристики и параллельной ей внутренней характеристики для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 8. – С. 1074–1086.
6. Рузиев М. Х. Задача с условием Франкля и Бицадзе–Самарского на линии вырождения и на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа // Известия вузов. Математика. 2012. № 8. – С. 43–52.
7. Ruziev M. Kh., Yuldasheva N. I. A problem of the Bitsadze–Samarskii type for mixed-type equations with singular coefficients // Uzbek Mathematical Journal. 2024. Vol. 68. – P. 121–126.
8. Мирсабуров М., Туруев Р. Н., Мирзаев Ф. A nonlocal boundary value problem for a mixed type equation // Uzbek Mathematical Journal. 2025. Vol. 69. – P. 173–184.
9. Мирсабурова У. М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Известия вузов. Математика. 2022. № 9. – С. 70–82.
10. Сабитов К. Б. К теории задачи Франкля для уравнения смешанного типа // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Т. 81, № 1. – С. 101–138.

11. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Университет, 2005. – 224 с.
12. Солдатов А. П. Решение одной краевой задачи теории функции со смещением // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 1. – С. 143–152.
13. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.