TURG‘UNLIK NAZARIYASI: YECHIMNING TURG‘UNLIGINI TA’RIF BO‘YICHA TEKSHIRISH

Jo‘rayeva Feruza Baxtiyor qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
feruzajorayevaasila@mail.ru
Berdieva Sevara Utkir qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
s3093122@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.20078261

Annotatsiya: Mazkur maqolada differensial tenglamalar va dinamik sistemalar nazariyasida muhim o‘rin tutuvchi turg‘unlik masalasi, xususan, yechimning turg‘unligini ta’rif bo‘yicha tekshirishning nazariy-metodologik asoslari tahlil qilinadi. Turg‘unlik tushunchasi boshlang‘ich shartlarning kichik o‘zgarishlari ta’sirida yechim trayektoriyasining muvozanat holatidan uzoqlashmasligi yoki vaqt o‘tishi bilan unga yaqinlashishi xususiyatini ifodalovchi asosiy matematik mezon sifatida talqin etiladi. Maqolada Lyapunov ma’nosidagi turg‘unlik, asimptotik turg‘unlik va noturg‘unlik tushunchalari ε–δ yondashuvi asosida izohlanadi. Shuningdek, ta’rif bo‘yicha tekshirish jarayonini tushunarli qilish maqsadida bir nechta amaliy misollar: $x' = -2x$, $x' = 0$, $x' = x$, $x' = -x^3$ hamda chiziqli ikki o‘lchamli sistema uchun yechimning turg‘unligi alohida ko‘rsatib beriladi. Har bir misolda δ ni tanlash, ε chegarani saqlash va vaqt bo‘yicha yechimning xatti-harakatini baholash bosqichlari izchil bayon qilinadi.

Kalit so‘zlar: turg‘unlik nazariyasi, Lyapunov turg‘unligi, differensial tenglama, dinamik sistema, ε–δ yondashuvi, boshlang‘ich shart, asimptotik turg‘unlik, noturg‘unlik.

Abstract

This article analyzes the theoretical and methodological foundations of stability in the theory of differential equations and dynamical systems, with particular attention to verifying the stability of a solution by definition. Stability is interpreted as a fundamental mathematical criterion describing whether a solution trajectory remains close to an equilibrium point under small changes in the initial conditions or tends to it as time increases. The paper explains Lyapunov stability, asymptotic stability and instability using the ε–δ approach. In order to make verification by definition clearer, several examples are included: $x' = -2x$, $x' = 0$, $x' = x$, $x' = -x^3$ and a two-dimensional linear system. In each example, the choice of δ, the preservation of the ε-bound and the behavior of the solution over time are discussed step by step.

Keywords: stability theory, Lyapunov stability, differential equation, dynamical system, ε–δ approach, initial condition, asymptotic stability, instability.

Аннотация

В статье анализируются теоретико-методологические основы устойчивости в теории дифференциальных уравнений и динамических систем, особое внимание уделяется проверке устойчивости решения по определению. Устойчивость трактуется как фундаментальный математический критерий, описывающий, остается ли траектория решения вблизи положения равновесия при малых изменениях начальных условий или стремится к нему с течением времени. В работе объясняются устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость и неустойчивость на основе ε–δ подхода. Для более наглядного понимания проверки по определению приведены примеры: $x' = -2x$, $x' = 0$, $x' = x$, $x' = -x^3$ и двумерная линейная система. В каждом примере

последовательно показаны выбор δ, сохранение ε-границы и поведение решения во времени.

Ключевые слова: теория устойчивости, устойчивость по Ляпунову, дифференциальное уравнение, динамическая система, ε–δ подход, начальное условие, асимптотическая устойчивость, неустойчивость.

Kirish

Turg‘unliknazariyasizamonaviymatematikaning differensial tenglamalar, dinamik sistemalar, boshqaruv nazariyasi va matematik modellashtirish bilan bevosita bog‘liq bo‘lgan muhim yo‘nalishlaridan biridir. Mazkur nazariya tizimlarning vaqt davomida qanday harakatlanishini, ularning boshlang‘ich shartlardagi kichik o‘zgarishlarga nisbatan qanday javob qaytarishini hamda muvozanat holatining saqlanish yoki buzilish qonuniyatlarini o‘rganadi. Amaliy jihatdan qaralganda, har qanday real jarayon — mexanik qurilma, elektr zanjiri, iqtisodiy model, biologik populyatsiya yoki avtomatik boshqaruv tizimi — tashqi va ichki ta’sirlar ostida o‘z holatini o‘zgartiradi. Shu sababli bunday tizimlarda yechimning turg‘un yoki noturg‘un ekanligini aniqlash ilmiy va amaliy jihatdan dolzarb masala hisoblanadi.

Differensial tenglamalar orqali ifodalangan modellarda boshlang‘ich qiymatlar ko‘pincha mutlaq aniqlikda berilmaydi. O‘lchash xatolari, tajriba sharoitidagi noaniqliklar, hisoblashdagi yaxlitlashlar va tashqi omillar tizimning dastlabki holatini oz miqdorda o‘zgartirishi mumkin. Agar boshlang‘ich shartdagi juda kichik farq vaqt o‘tishi bilan yechimning keskin o‘zgarishiga olib kelsa, bunday model amaliy jihatdan ishonchsiz hisoblanadi. Aksincha, boshlang‘ich shart ozgina o‘zgarganda ham yechim muvozanat holatiga yaqin qolsa, tizim turg‘un deb baholanadi. Shu nuqtayi nazardan, yechimning turg‘unligini ta’rif bo‘yicha tekshirish turg‘unlik tushunchasining eng asosiy, qat’iy va umumiy matematik ifodasini beradi.

Bugungi ilmiy tadqiqotlarda turg‘unlik nazariyasiga e’tibor ortib bormoqda. Murakkab tizimlarni modellashtirish, robototexnika, aerokosmik boshqaruv, sun’iy intellekt algoritmlarining barqaror ishlashi, epidemiologik prognozlash va iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda yechimlarning ishonchliligi alohida ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, nochiziqli dinamik sistemalarda kichik buzilishlarning keyingi harakatga ta’sirini baholash klassik matematik yondashuvlarni puxta qo‘llashni talab etadi. Ta’rif bo‘yicha tekshirish usuli bu borada asosiy nazariy mezon bo‘lib, u yechimlarning boshlang‘ich shartlarga uzluksiz bog‘liqligini aniq ε–δ shartlar orqali ifodalaydi.

Metodologiya

Mazkur tadqiqotda turg‘unlik nazariyasini o‘rganish va yechimning turg‘unligini ta’rif asosida tekshirish uchun matematik analiz, oddiy differensial tenglamalar nazariyasi hamda dinamik sistemalar tahlilining qat’iy isbotlash usullari qo‘llanildi. Asosiy e’tibor yechimning boshlang‘ich shartlarga sezgirligini aniqlashga, ya’ni kichik og‘ishlarning vaqt davomida qanday o‘zgarishini baholashga qaratildi. Shu maqsadda ε–δ yondashuvi asosiy metod sifatida tanlandi, chunki u turg‘unlik tushunchasini faqat intuitiv emas, balki qat’iy matematik mezonlar orqali ifodalash imkonini beradi.

Tadqiqotda umumiy dinamik sistema quyidagi ko‘rinishda qaraldi:

$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$

Bu yerda $x(t)$— vaqtga bog‘liq yechim, x_0— boshlang‘ich qiymat, $f(t, x)$, esa tizim harakatini belgilovchi funksiya hisoblanadi. Muvozanat nuqtasi odatda $f(t, 0) = 0$ shart orqali aniqlanadi. Agar $x = 0$ yechim mavjud bo‘lsa, uning turg‘unligini tekshirish uchun nolga yaqin boshlangan yechimlarning keyingi vaqtlarda ham nolga yaqin qolishi talab etiladi. Bunda turg‘unlik ta’rifi quyidagi mazmunga ega: har qanday $\varepsilon > 0$uchunshunday$\delta > 0$ son topilsinki, agar $|x_0| < \delta$ bo‘lsa, u holdabarcha$t \geq t_0$ uchun$|x(t)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin.

Asimptotik turg‘unlikni aniqlashda esa ikki shart birgalikda tekshiriladi. Birinchisi — yuqoridagi Lyapunov turg‘unligi sharti, ikkinchisi — yechimning vaqt cheksizlikka intilganda muvozanatga yaqinlashishi, ya’ni$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ bo‘lishidir. Noturg‘unlikni ko‘rsatish uchun esa odatda bitta$\varepsilon_0 > 0$ topiladi va har qanday kichik $\delta > 0$ uchun shunday boshlang‘ich qiymat tanlanadiki, vaqtningma’lumbirqiymatidayechim εchegaradanchiqibketadi. Demak, ta’rif bo‘yicha tekshirishda masala faqat yechimni topish bilan cheklanmaydi; eng muhim jihat — ε uchun mos δ ni asosli tanlay olishdir.

Ta’rif bo‘yicha tekshirish algoritmi

Yechimning turg‘unligini ta’rif bo‘yicha tekshirish quyidagi izchil bosqichlar orqali amalga oshiriladi:

- Avvalo, differensial tenglamaning muvozanat yechimi aniqlanadi. Ko‘pinchabu$x = 0$ yechim bo‘ladi.
- Keyin tenglamaningumumiyyoki$x_0$boshlang‘ichshartgamos$x(t)$yechimi topiladi.
- Yechimning moduli $|x(t)|$baholanadivauning$|x_0|$orqali ifodalanadigan yuqori chegarasi aniqlanadi.
- Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $|x(t)| < \varepsilon$bo‘lishini ta’minlaydigan δ tanlanadi.
- Agar bunday δ barcha $t \geq t_0$ uchun mavjud bo‘lsa, yechim Lyapunov ma’nosida turg‘un hisoblanadi.
- Agar bundan tashqari $x(t) \to 0$bo‘lsa, yechim asimptotik turg‘un bo‘ladi.
- Agar biror ε_0 uchun boshlang‘ich qiymat qanchalik kichik tanlanmasin, yechim vaqt o‘tishi bilan ε_0 chegaradan chiqib ketsa, yechim noturg‘un deyiladi.

Ta’rif bo‘yicha tekshirishga doir misollar

1-misol. $x' = -2x$ tenglamasining turg‘unligini tekshirish

Quyidagi oddiy differensial tenglama qaralsin:

$$x' = -2x, \quad x(0) = x_0.$$

Uning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$x(t) = x_0 e^{\{-2t\}}.$$

Endi nol yechimning turg‘unligini ta’rif bo‘yicha tekshiramiz. Har qanday $\varepsilon > 0$ son berilgan bo‘lsin. Biz shunday $\delta > 0$ tanlashimiz kerakki, $|x_0| < \delta$bo‘lsa, barcha $t \geq 0$ uchun $|x(t)| < \varepsilon$ bajarilsin. Yechim modulini baholaymiz:

$|x(t)| = |x_0| e^{\{-2t\}} \leq |x_0|.$

Agar $\delta = \varepsilon$ deb olsak, $|x_0| < \delta = \varepsilon$bo‘lganida barcha $t \geq 0$ uchun $|x(t)| \leq |x_0| < \varepsilon$bo‘ladi. Demak, nol yechim Lyapunov ma’nosida turg‘un. Bundan tashqari, t→∞ da $e^{\{-2t\}} \to 0$bo‘lgani uchun $x(t) \to 0$. Shuning uchun $x = 0$ yechim nafaqat turg‘un, balki asimptotik turg‘un ham hisoblanadi.

2-misol. $x' = 0$ tenglamasida turg‘un, lekin asimptotik turg‘un bo‘lmagan yechim

Quyidagi tenglama qaralsin:

$$x' = 0, \quad x(0) = x_0.$$

Bu tenglamaning yechimi o‘zgarmas bo‘ladi:

$$x(t) = x_0.$$

Ta’rifga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon$ tanlaymiz. Agar $|x_0| < \delta$bo‘lsa, u holda barcha $t \geq 0$ uchun $|x(t)| = |x_0| < \varepsilon$bo‘ladi. Demak, $x = 0$ yechim Lyapunov ma’nosida turg‘un. Biroq yechim vaqt o‘tishi bilan nolga intilmaydi, chunki $x(t) = x_0$ doimiy qiymatda qoladi. Agar $x_0 \neq 0$ bo‘lsa, $lim(t \to \infty)x(t) = x_0$bo‘ladi. Shuning uchun bu misolda yechim turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas.

3-misol. $x' = x$ tenglamasining noturg‘unligini ta’rif bo‘yicha ko‘rsatish

Endi quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$x' = x, \quad x(0) = x_0.$$

Uning yechimi:

$$x(t) = x_0 e^t.$$

Bu yerda boshlang‘ich qiymat kichik bo‘lsa ham, e^tko‘paytuvchi vaqt o‘tishi bilan cheksiz ortadi. Noturg‘unlikni ta’rif bo‘yicha ko‘rsatish uchun $\varepsilon^0 = 1$ deb olaylik. Har qanday $\delta > 0$ berilganida $x^0 = \frac{\delta}{2}$ tanlash mumkin. Bu holda $|x^0| < \delta$. Lekin $t = ln\left(\frac{2}{\delta}\right)$aqtniolsak, quyidagigaegabo‘lamiz:

$$|x(t)| = (\tfrac{\delta}{2})e^{\{\ln(\frac{2}{\delta})\}} = 1.$$

Demak, boshlang‘ich og‘ish δ dan kichik bo‘lsa ham, yechim ma’lum vaqtdan keyin $\varepsilon_0 = 1$ chegaraga yetadi va undan ham oshib ketadi. Shunday qilib, $x = 0$ yechim Lyapunov ma’nosida noturg‘un hisoblanadi.

4-misol. $x' = -x^3$ tenglamasining ta’rif bo‘yicha turg‘unligi

Nochiziqli tenglama sifatida quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz:

$$x' = -x^3, \quad x(0) = x_0.$$

Ajratiluvchi o‘zgaruvchilar usuli orqali yechim quyidagicha yoziladi:

$$x(t) = x_0 / \sqrt{}(1 + 2x_0{}^2 t).$$

Bu yechim uchun barcha $t \geq 0$ da maxraj 1 dan kichik emas, shuning uchun:

$|x(t)| = |x_0| / \sqrt{}(1+2x_0{}^2t) \leq |x_0|$.

Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon$ tanlansa, $|x_0| < \delta$ shartidan barcha $t \geq 0$ uchun |x(t)|<ε kelib chiqadi. Demak, $x = 0$ yechim turg‘un. Bundan tashqari, $t \to \infty$ da maxraj cheksiz ortadi va $x(t) \to 0$bo‘ladi. Shuning uchun bu yechim asimptotik turg‘un. Ushbu misol shuni ko‘rsatadiki, nochiziqli tenglamalarda ham ta’rif bo‘yicha tekshirish yechimni baholash orqali amalga oshirilishi mumkin.

5-misol. Ikki o‘lchamli sistemada turg‘unlikni tekshirish

Quyidagi chiziqli sistema berilgan bo‘lsin:

$x' = -x, \quad y' = -2y.$

Boshlang‘ich shartlar $x(0) = x_0, y(0) = y_0$bo‘lsa, yechimlar quyidagicha topiladi:

$$x(t) = x_0 e^{\{-t\}}, \quad y(t) = y_0 e^{\{-2t\}}$$

Sistemada nol muvozanat nuqtasining turg‘unligini tekshirish uchun Evklid normasi olinadi:

$$||(x(t), y(t))|| = \sqrt{}(x(t)^2 + y(t)^2).$$

Yechimlarni qo‘yib baholaymiz:

$$||(x(t), y(t))|| = \sqrt{}(x_0{}^2 e\text{^}\{-2t\} + y_0{}^2 e\text{^}\{-4t\}) \leq \sqrt{}(x_0{}^2 + y_0{}^2).$$

Agar boshlang‘ichog‘ish$||(x_0, y_0)|| < \delta$bo‘lsa va $\delta = \varepsilon$ deb tanlansa, barcha $t \geq 0$ uchun $||(x(t), y(t))|| < \varepsilon$bo‘ladi. Shunday qilib, nol yechim Lyapunov ma’nosida turg‘un. $e^{\{-t\}}$ va

$e^{\{-2t\}}$ko'paytuvchilarnolgaintilganiuchun sistema yechimi ham nolga intiladi. Demak, nol muvozanat nuqtasi asimptotik turg'un hisoblanadi.

Misollar bo'yicha umumlashtiruvchi jadval

Tenglama yoki sistema	Yechim	Ta'rif bo'yicha xulosa	Asosiy δ tanlovi yoki dalil
$x' = -2x$	$x = x_0 e^{\{-2t\}}$	*Asimptotik turg'un*	$\delta = \varepsilon;\ \lvert x(t)\rvert \leq \lvert x_0\rvert$
$x' = 0$	$x = x_0$	$Turg'un, ammo\ asimpto$	δ =ε; yechimnolgaintilmaydi
$x' = x$	$x = x_0 e\text{^}t$	*Noturg'un*	$\varepsilon^0 = 1;\ kichik\ x_0\ vaqt\ o'tib\ chegaradan$
$x' = -x^3$	$x = \frac{x_0}{\sqrt{(1 + 2x_0{}^2 t)}}$	*Asimptotik turg'un*	$\delta = \varepsilon;\ maxraj\ vaqt\ bilan\ ortadi$
$x' = -x,$ $y' = -2y$	$x = x^0 e^{\{-t\}},$ $y = y_0 e^{\{-2t\}}$	*Asimptotik turg'un*	$\delta = \varepsilon;\ norma\ kamayadi$

Natijalar

Tahlillar shuni ko'rsatdiki, yechimning turg'unligini ta'rif bo'yicha tekshirishda eng muhim masala yechimning boshlang'ich qiymatga nisbatan qanday baholanishini aniqlashdir. Agar yechimning moduli barcha vaqtlar uchun boshlang'ich og'ishdan katta bo'lmagan yoki ma'lum koeffitsiyent orqali chegaralangan bo'lsa, δ ni ε ga bog'lab tanlash mumkin bo'ladi. Masalan, $x' = -2x\ va\ x' = -x^3$ tenglamalarida yechim moduli $|x_0|$ dan oshmaydi, shu sababli $\delta = \varepsilon$ tanlovi yetarli bo'ladi. Ikki o'lchamli chiziqli sistemada ham norma vaqt bo'yicha kamayuvchi bo'lgani uchun ayni yondashuv ishlaydi.

Natijalardan ko'rinadiki, turg'unlik va asimptotik turg'unlik bir xil tushuncha emas. $x' = 0$ tenglamasida nol yechim turg'un, chunki kichik boshlang'ich og'ish doimo kichikligicha qoladi. Biroq u asimptotik turg'un emas, chunki yechim nolga intilmaydi. $x' = x$ tenglamasida esa boshlang'ich og'ish qanchalik kichik bo'lmasin, vaqt o'tishi bilan eksponenta ta'sirida yechim muvozanatdan uzoqlashadi. Bu holat noturg'unlikning klassik ko'rinishi bo'lib, ta'rif asosida aniq isbotlanadi.

Muhokama

Turg'unlik nazariyasining asosiy g'oyasi shundan iboratki, tizimning ishonchliligi faqat uning yechimini topish bilan emas, balki bu yechimning boshlang'ich shartlardagi kichik o'zgarishlarga qanday javob berishi bilan ham belgilanadi. Ta'rif bo'yicha tekshirish usulining ustun tomoni — u turg'unlik tushunchasining eng sof va qat'iy matematik mazmunini ochib beradi. Bunda turg'unlik, asimptotik turg'unlik va noturg'unlik orasidagi farqlar bevosita $\varepsilon - \delta$ shartlar yordamida ko'rinadi.

Shu bilan birga, bu yondashuv amaliy hisoblashlarda ba'zan murakkablik tug'diradi. Har bir tenglama uchun umumiy yechimni topish yoki mos δ ni aniq ko'rsatish doim ham oson emas. Ayniqsa, yuqori o'lchamli yoki kuchli nochiziqli sistemalarda ta'rif bo'yicha tekshirish ko'p hollarda maxsus baholash usullarini talab etadi. Shu sababli zamonaviy turgʻunlik nazariyasida Lyapunov funksiyalari, chiziqlashtirish, spektral tahlil va sonli modellashtirish usullari keng qoʻllaniladi. Biroq ushbu yordamchi metodlarning barchasi mazmunan aynan taʼrifda berilgan yaqinlik va chegaralanganlik gʻoyasiga tayanadi.

Maqolaga kiritilgan misollar shuni koʻrsatadiki, taʼrif boʻyicha tekshirish talabalarda turgʻunlik tushunchasini formal va intuitiv jihatdan birgalikda shakllantiradi. Masalan, $x' = -2x$ tenglamasida yechimning vaqt boʻyicha soʻnishi turgʻunlikni yaqqol koʻrsatsa, $x' = x$ tenglamasida boshlangʻich xatolikning eksponentsial oʻsishi noturgʻunlik mazmunini ochib beradi. Shu sababli turgʻunlik nazariyasini oʻqitishda avvalo taʼrif, soʻngra sodda misollar, undan keyin esa Lyapunov funksiyalari kabi murakkab usullarni berish metodik jihatdan maqsadga muvofiqdir.

Xulosa

Mazkur tahrirlangan maqolada yechimning turgʻunligini taʼrif boʻyicha tekshirish masalasi nazariy va amaliy jihatdan yoritildi. Turgʻunlikning Lyapunov maʼnosidagi taʼrifi, asimptotik turgʻunlik va noturgʻunlik tushunchalari $\varepsilon - \delta$ yondashuvi asosida bayon qilindi. Tahlillar shuni koʻrsatdiki, taʼrif boʻyicha tekshirishda asosiy vazifa har qanday $\varepsilon > 0$ uchun mos $\delta > 0$ ni topish va boshlangʻich ogʻish δ dan kichik boʻlganida yechim barcha vaqtlar davomida ε chegaradan chiqmasligini isbotlashdan iborat.

Maqolaga qoʻshimcha kiritilgan misollar mavzuning amaliy tushunilishini kuchaytiradi. $x' = -2x$ va $x' = -x^3$ tenglamalari asimptotik turgʻunlikni, $x' = 0$ tenglamasi turgʻun, ammo asimptotik boʻlmagan holatni, $x' = x$ tenglamasi esa noturgʻunlikni taʼrif asosida koʻrsatadi. Ikki oʻlchamli sistema misoli esa turgʻunlikni norma orqali tekshirish mumkinligini namoyon qiladi. Umuman olganda, yechimning turgʻunligini taʼrif boʻyicha tekshirish turgʻunlik nazariyasining fundamental asosi boʻlib, differensial tenglamalar, matematik modellashtirish va boshqaruv nazariyasi uchun muhim ilmiy-amaliy ahamiyatga ega.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Abdullayev, A. (2020). Matematik modellashtirish asoslari. Toshkent: Fan.
2. Arnold, V. I. (1984). Oddiy differensial tenglamalar. Moskva: Nauka.
3. Barbashin, E. A. (1967). Turgʻunlik nazariyasiga kirish. Moskva: Nauka.
4. Boymirzayev, K. M. (2018). Differensial tenglamalar. Toshkent: Oʻzbekiston.
5. Demidovich, B. P. (1967). Turgʻunlikning matematik nazariyasi boʻyicha maʼruzalar. Moskva: Nauka.
6. Hahn, W. (1967). Stability of Motion. Berlin: Springer-Verlag.
7. Joʻrayev, T. J., & Saʼdullayev, A. (1995). Differensial tenglamalar kursi. Toshkent: Oʻqituvchi.
8. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems (3rd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.
9. Krasovskiy, N. N. (1959). Harakat turgʻunligi nazariyasining ayrim masalalari. Moskva: Fizmatgiz.
10. LaSalle, J. P., & Lefschetz, S. (1961). Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications. New York: Academic Press.