NOSTANDART FUNKSIYALARNING ANIQMAS INTEGRALLARINI HISOBLASH

Teshayeva M.[1]
[1]O`zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti Matematika va informatika ta`lim yo`nalishi 2-kurs talabasi
Bolikulov F.[2]
[2]Prezident ta`lim muassasalari agentligi tizimidagi Samarqand shahar 1-sonli ixtisoslashtirilgan maktab-internati Matematika fani o`qituvchisi
https://doi.org/10.5281/zenodo.7238152

Annotatsiya. *Ushbu tezisdan bir nechta nostandart funksiyalarning aniqmas integrallarini hisoblash usullari keltirilgan bo`lib, ushbu aniqmas integrallarni hisoblash ba`zi hayotiy masalalarning matematik modelini tuzishga bevosita bog`liqdir.*

Kalit so`zlar. *nostandart funksiyalar, sonning butun qismi, sonning kasr qismi, signimum funksiya.*

Standart funksiyalar va ushbu funksiyalar orqali hosil qilinadigan funksiyalarning aniqmas integrallarini hisoblash usullari universitet talabalariga Matematik analiz kursidan ma`lum. Ushbu tezisda bir qancha hayotiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonida duch kelinadigan va nostandart funksiyalar deb ataladigan funksiyalarning aniqmas integrallarini hisoblash usullari keltirilgan.

1-misol. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang: $\int |x|\, dx$

Yechimi:

$f(x) = |x|$ funksiyani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Demak, berilgan aniqmas integral quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\dfrac{x^2}{2} + C, x < 0 \end{cases}$$

U holda, ushbu aniqmas integralni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\int |x|\, dx = \frac{x^2}{2} signx + C$$

2-misol. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang: $\int \mathrm{sign(x)\, dx}$

Yechimi. Bu integralni hisoblash uchun signimum funksiyaning quyidagi xossasidan foydalanamiz: $signx = \frac{x}{|x|}$. U holda

$$\int signx\, dx = \int \frac{x}{|x|} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2}} dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ dx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t}}{2} + C = t + C =$$

$|x| + C$

Demak, $\int signx\, dx = |x| + C$.

3-misol. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang: $\int \text{sign}(\text{sinx})\, \text{dx}$

Yechimi: Yuqorida keltirilgan 2-misoldagi xossadan foydalanamiz:

$$\int \text{sign}(\text{sinx})\, \text{dx} = \int \frac{\sin x}{|\sin x|} \text{dx} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{bmatrix} = \int -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \arccos t + C =$$

$= \arccos(\cos x) + C$.

4-misol. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang: $\int [x]\, dx$.

Yechimi:

$f(x) = [x]$ funksiya uchun quyidagi tengliklar o`rinli:

$x \in [n-1, n)$ bo‘lganda funksiyaning qiymati $f(n-0) = n-1$ ga teng;

$x \in [n, n+1)$ bo‘lganda esa funksiya $f(n+0) = n$ ga teng bo‘ladi.

Funksiyaning boshlang`ich funksiyasini $F(x)$ deb belgilasak, ushbu funksiyaning qiymati mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$F(n-0) = x(n-1) + C_n$ va $F(n+0) = xn + C_n$.

$x = n$ nuqtada $F(n-0) = F(n+0)$ tenglik o`rinli bo‘lganligi uchun:

$$n^2 - n + C_{n-1} = n^2 + C_n,$$

Ushbu tenglikdan esa quyidagi rekurrent ketma-ketlikka kelamiz:

$$C_n = C_{n-1} - n.$$

Hosil qilingan rekurrent ketma-ketlikni yechamiz. Buning uchun n o`zgaruvchiga ketma-ket qiymat beramiz:

$$C_1 = C_0 - 1,\ \ C_2 = C_0 - 1 - 2,\ \ C_3 = C_0 - 1 - 2 - 3, \dots$$

Demak, keltirilgan rekurrent ketma-ketlik umumiy hadi quyidagicha aniqlanadi:

$$C_n = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bundan esa

$$F(n) = nx + C_0 - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$F(x) = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C_0.$$

tenglikka ega bo`lamiz. Demak,

$$\int [x]\,dx = x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C_0$$

5-misol. Quyidagi aniqmas integralni hisoblang: $\int \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx.$

Solution: Ushbu integralni hisoblash uchun dastlab quyidagicha almashtirish olamiz:

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} = t \\ x = \frac{1}{t^2} \\ dx = -\frac{2dt}{t^3} \end{bmatrix} = -\int \frac{2[t]}{t^3} dt,$$

Integral ostidagi funksiyani $f(t) = \frac{2[t]}{t^3}$ kabi, uning boshlang`ich funksiyasini esa $F(t)$ kabi belgilaymiz.

Yuqorida keltirilgan 4-misoldek ushbu funksiyani va uning boshlang`ich funksiyasini quyidagi ko`rinishlarda yozib olamiz:

$$f(n-0) = -\frac{2(n-1)}{t^3} \rightarrow F(n-0) = \frac{n-1}{t^2} + C_{n-1},$$

$$f(n+0) = -\frac{2n}{t^3} \rightarrow F(n+0) = \frac{n}{t^2} + C_n.$$

$x = n$ nuqtada $F(n-0) = F(n+0)$ tenglik o`rinli bo‘lganligi uchun:

$$C_n = C_{n-1} - \frac{1}{t^2}.$$

Hosil qilingan rekurrent ketma-ketlikning umumiy hadini topamiz;

$$C_1 = C_0 - 1,\ \ C_2 = C_0 - 1 - \frac{1}{2^2}, \ldots, C_n = C_0 - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right), \ldots$$

Topilgan umumiy hadni funksiyaning boshlang`ich funksiyasi topilgan tenglikka olib borib qo`ysak, berilgan funksiyaning aniqmas integralini topamiz:

$$F(n) = \frac{n}{t^2} + C_0 - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right),$$

$F(t) = \frac{[t]}{t^2} + C_0 - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{t^2}\right),$

Demak,

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] dx = -\left(x \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] + C_0 - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]^2} \right) \right)$$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik tahlil. 1-qism. “Mumtoz so`z”, Toshkent, 2018.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Издательство ЧеРо, 13-е издание. 1997, Москва.
3. Sa’dullayev A., Mansurov H., Xudoyberganov G. va b.q. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to`plami. 1-qism. “O`zbekiston” nashriyoti. Toshkent, 1993.