FUNKSIYA LIMITINI SONLI USULLAR ORQALI HISOBLASH VA DASTURIY REALIZATSIYA

Orifjonova Zahroxon Yoqubjon qizi
NamDU Fizika-matematika fakulteti
Axborot tizimlari va texnologiyalari yo\`nalishi 1-kurs talabasi
Ilmiy maslahatchi: Bahodir Davronov Tohirjanovich
https://doi.org/10.5281/zenodo.21214748

Annotatsiya: Ushbu maqolada funksiya limitini aniqlash masalasi sonli usullar yordamida tahlil qilinadi va ularning dasturiy realizatsiyasi koʻrib chiqiladi. Klassik ε–δ ta’rifiga asoslangan nazariy yondashuv matematik jihatdan qat’iy boʻlsa-da, kompyuter hisoblashlarida bevosita qoʻllash qiyin hisoblanadi. Shu sababli, tadqiqotda funksiya argumentini limit nuqtasiga ketma-ket yaqinlashtirishga asoslangan sonli algoritmlar taklif etiladi. Bir tomonlama va ikki tomonlama limitlarni baholash, oʻrtachalashtirish usullari orqali tebranishlarni kamaytirish hamda algoritmni toʻxtatish mezonlari ishlab chiqiladi. Sonli tajribalar natijalari taklif etilgan yondashuvning aniqligi va barqarorligini tasdiqlaydi. Algoritmlarning dasturiy realizatsiyasi hisoblash matematikasi va muhandislik masalalarida qoʻllash imkoniyatini namoyon etadi.

Kalit soʻzlar: funksiya limiti, sonli usullar, ketma-ket yaqinlashuv, hisoblash matematikasi, dasturiy realizatsiya, sonli analiz, konvergensiya.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И ИХ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Аннотация: В данной статье рассматривается задача вычисления предела функции с использованием численных методов и их программной реализации. Классическое определение предела, основанное на ε–δ подходе, обладает строгой теоретической основой, однако его прямое применение в компьютерных вычислениях затруднено из-за ограниченной точности представления чисел. В работе предложен численный подход, основанный на последовательном приближении аргумента к предельной точке, а также на анализе сходимости значений функции. Рассматриваются односторонние и двусторонние пределы, методы усреднения для подавления колебаний и критерии остановки алгоритма. Результаты численных экспериментов подтверждают устойчивость и эффективность предложенного метода при вычислении пределов различных типов функций. Программная реализация алгоритма демонстрирует его применимость в вычислительной математике и инженерных задачах.

Ключевые слова: предел функции, численные методы, последовательное приближение, вычислительная математика, программная реализация, численный анализ, сходимость.

NUMERICAL METHODS FOR COMPUTING THE LIMIT OF A FUNCTION AND THEIR PROGRAMMATIC IMPLEMENTATION

Abstract: This paper addresses the problem of computing the limit of a function using numerical methods and their programmatic implementation. The classical definition of a limit based on the ε–δ approach provides strong theoretical foundations; however, its direct application in computer calculations is limited due to finite numerical precision. A numerical approach based on sequential approximation of the argument to the limit point and convergence analysis of function values is proposed. One-sided and two-sided limits, averaging techniques for oscillation reduction, and stopping criteria for the algorithm are examined. The results of numerical experiments confirm the stability and efficiency of the proposed method for computing limits of various types of functions. The programmatic implementation demonstrates the applicability of the approach in computational mathematics and engineering problems.

Keywords: function limit, numerical methods, sequential approximation, computational mathematics, programmatic implementation, numerical analysis, convergence.

KIRISH

Matematik analizda funksiya limitini aniqlash tushunchasi fundamental ahamiyatga ega bo‘lib, uzluksizlik, hosila, integral va qatorlar nazariyasining asosi hisoblanadi. An’anaviy nazariy yondashuvlarda limit tushunchasi ε–δ ta’rifiga asoslanib, qat’iy matematik aniqlik bilan ifodalanadi. Biroq real hisoblash jarayonlarida, ayniqsa kompyuter yordamida hisoblashda, bunday qat’iy ta’rifni bevosita qo‘llash imkoniyati mavjud emas. Chunki raqamli hisoblashlar chekli aniqlikda amalga oshiriladi va real sonlar uzluksiz emas, balki diskret ko‘rinishda ifodalanadi. Shu sababli funksiya limitini aniqlashda **sonli (numerik) usullar** muhim ahamiyat kasb etadi.

Nazariy jihatdan funksiya limiti quyidagicha aniqlanadi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

agar har qanday $\varepsilon > 0$uchun shunday $\delta > 0$mavjud bo‘lsaki,

$$0 <| x - a |< \delta \Rightarrow | f(x) - L |< \varepsilon.$$

Ammo bu ta’rif kompyuter algoritmlarida to‘g‘ridan-to‘g‘ri ishlatilmaydi. Amaliy hisoblashlarda limit qiymati $x$ning $a$ga yaqinlashuvchi ketma-ket qiymatlari orqali taxmin qilinadi:

$$x_n \to a (n \to \infty),$$

va mos ravishda $f(x_n)$qiymatlarining xulqi tahlil qilinadi. Bu esa limitni **sonli yaqinlashish** orqali aniqlash g‘oyasiga olib keladi.

Zamonaviy ilmiy va muhandislik masalalarida funksiya limitlarini hisoblash keng qo‘llaniladi. Masalan, fizik modellashtirishda chegara holatlarni aniqlash, iqtisodiy modellarda chegara qiymatlarni baholash, differensial tenglamalarni yechishda boshlang‘ich shartlarni aniqlash hamda sun’iy intellekt algoritmlarida uzluksiz funksiyalarni diskretlashtirish jarayonlari limit tushunchasiga bevosita bog‘liq. Shu sababli limitni tez, barqaror va aniqlik bilan hisoblay oladigan **sonli algoritmlar** ishlab chiqish dolzarb vazifa hisoblanadi.

Ushbu tadqiqotda funksiya limitini hisoblash uchun ketma-ket yaqinlashish, bir tomonlama yaqinlashuv va adaptiv qadamli sonli usullar qo‘llanadi. Hisoblash jarayonida nuqtalar to‘plami

$$x_n = a \pm h_n, h_n \to 0$$

ko‘rinishida tanlanib, limit qiymati

$$L \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

orqali baholanadi. Bu yondashuv sonli xatoliklarni kamaytirish va shovqinli funksiyalar bilan ishlashda barqarorlikni oshirish imkonini beradi.

Tadqiqotning muhim jihatlaridan biri - sonli usullarni **dasturiy realizatsiya qilish**dir. Algoritmlarni Python, MATLAB yoki C++ kabi dasturlash tillarida amalga oshirish orqali hisoblash tezligi, aniqligi va resurs sarfi tahlil qilinadi. Dasturiy modellashtirish nazariy formulalarning amaliy samaradorligini baholashga imkon beradi va oʻquv hamda ilmiy tadqiqotlar uchun qulay muhit yaratadi.

Mazkur ishning asosiy maqsadi funksiya limitini hisoblashning samarali sonli algoritmlarini ishlab chiqish, ularning xatoliklarini tahlil qilish va dasturiy realizatsiya orqali amaliy natijalar olishdan iborat. Tadqiqot natijalari matematik analizni oʻqitish jarayonida, hisoblash matematikasida va muhandislik masalalarini yechishda qoʻllanishi mumkin.

METODOLOGIYA

Ushbu tadqiqotda funksiya limitini sonli usullar orqali baholash uchun ketma-ket yaqinlashuvga asoslangan hisoblash strategiyasi ishlab chiqildi. Metodologiya real sonlar ustida chekli aniqlikda bajariladigan kompyuter hisoblashlarining xususiyatlarini inobatga olgan holda tuzildi va nazariy $\varepsilon - \delta$ ta’rifining amaliy ekvivalentini yaratishga qaratildi. Asosiy gʻoya — argumentning limit nuqtasiga yaqinlashuvchi diskret nuqtalar toʻplamini qurish, ularda funksiya qiymatlarini hisoblash va ushbu qiymatlarning barqaror konvergensiyasini aniqlashdan iborat.

Birinchi bosqichda limit nuqtasi $a$atrofida yaqinlashuvchi ketma-ketlik tanlanadi. Bunda qadamlar monoton ravishda nolga intiladi:

$$h_n = \frac{h_0}{2^n}, n = 1,2, \dots$$

va mos ravishda nuqtalar

$$x_n^{\pm} = a \pm h_n$$

koʻrinishida quriladi. Bu tanlov limitga yaqinlashishda yuqori barqarorlikni ta’minlaydi hamda suzuvchi nuqta (floating-point) xatoliklarini kamaytiradi. Agar limit bir tomonlama boʻlsa, faqat mos ishorali $x_n$lar olinadi.

Ikkinchi bosqichda lokal sonli baholash amalga oshiriladi. Har bir $x_n$uchun funksiya qiymati hisoblanadi:

$$f_n = f(x_n).$$

Limitning dastlabki taxmini ketma-ket ikkita qiymat farqining kichrayishi orqali baholanadi:

$$| f_n - f_{n-1} | < \tau,$$

bu yerda τ— foydalanuvchi belgilagan aniqlik chegarasi (tolerans). Ushbu shart bajarilganda ketma-ketlik konvergent deb qabul qilinadi.

Uchinchi bosqichda shovqin va lokal tebranishlarni kamaytirish uchun **oʻrtachalashtirilgan baholash** qoʻllanadi. Ya’ni, limit qiymati oxirgi $k$ta hisoblangan qiymatlarning arifmetik oʻrtachasi orqali aniqlanadi:

$$L_N = \frac{1}{k} \sum_{i=N-k+1}^{N} f_i \,.$$

Bu usul ayniqsa tebranuvchi funksiyalar yoki yaqinlashish tezligi past boʻlgan holatlarda natijaning barqarorligini oshiradi.

To'rtinchi bosqichda **ikki tomonlama yaqinlashuv** nazorati o'rnatiladi. Agar

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \approx \lim_{x\to a^+} f(x),$$

ya'ni

$$|\, L^- - L^+ \,| < \tau,$$

bo'lsa, umumiy limit mavjud va ishonchli deb qabul qilinadi. Aks holda, limit mavjud emasligi yoki faqat bir tomonlama ekanligi qayd etiladi.

Beshinchi bosqichda **xatolik bahosi** hisoblanadi. Sonli xatolik yaqinlashish tezligi orqali aniqlanadi:

$$E_n = |\, f(x_n) - L_N \,|.$$

Agar $E_n$monoton kamayib borsa va max $E_n < \tau$sharti bajarilsa, algoritm to'xtatiladi. Bu mezon algoritmning avtomatik to'xtashini (stopping criterion) ta'minlaydi.

Metodologiyaning yakuniy qismi - **dasturiy realizatsiya**. Algoritm Python/MATLAB kabi tillarda siklli hisoblash orqali amalga oshiriladi; bunda qadamni moslash (adaptive step) mexanizmi joriy etilib, konvergensiya sekinlashganda $h_n$tezroq kamaytiriladi. Hisoblash murakkabligi $O(N)$bo'lib, bu uni real vaqt rejimidagi hisoblashlar uchun mos qiladi.

Shunday qilib, ishlab chiqilgan metodologiya funksiya limitini sonli baholashda aniqlik, barqarorlik va dasturiy samaradorlikni birlashtiradi hamda nazariy limit tushunchasining amaliy, hisoblashga qulay modelini taqdim etadi.

NATIJALAR

O'tkazilgan sonli tajribalar natijalari funksiya limitini hisoblashda taklif etilgan algoritmning aniqligi va barqarorligini tasdiqladi. Tadqiqot davomida turli tipdagi funksiyalar, jumladan uzluksiz, uzilish nuqtasiga ega, tebranuvchi va cheksiz limitga ega funksiyalar ustida hisoblashlar amalga oshirildi. Hisoblashlar limit nuqtasiga yaqinlashuvchi ketma-ket argument qiymatlari asosida olib borildi va olingan natijalar nazariy limit qiymatlari bilan taqqoslandi.

Birinchi navbatda uzluksiz funksiyalar uchun olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, $x \to a$da limit mavjud bo'lgan hollarda funksiya qiymatlari ketma-ketligi tez konvergensiyaga ega bo'ladi. Masalan,

$$f(x) = \sin\, x, x \to 0$$

uchun sonli hisoblashlar natijasida

$$f(x_n) \to 0$$

ekanligi aniqlandi va xatolik

$$E_n = |\, f(x_n) - 0 \,|$$

eksponentsial tarzda kamaydi. Bu holat tanlangan qadamlar ketma-ketligi $h_n = h_0/2^n$ning samaradorligini tasdiqlaydi.

Ikkinchi holatda uzilish nuqtasiga ega bo'lgan funksiyalar tahlil qilindi. Masalan,

$$f(x) = \frac{|\, x \,|}{x}$$

funksiyasi uchun $x \to 0$da sonli baholashlar shuni ko'rsatdiki, chap va o'ng tomondan yaqinlashuvlar turli qiymatlarga intiladi:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Algoritmda joriy etilgan ikki tomonlama tekshiruv mezoni yordamida ushbu holatda umumiy limit mavjud emasligi to‘g‘ri aniqlangan. Bu natija usulning faqat limitni hisoblash emas, balki uning mavjudligini tekshirishda ham samarali ekanini ko‘rsatadi.

Tebranma funksiyalar uchun ham sonli natijalar barqarorlikni namoyon etdi. Xususan,

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right), x \to 0$$

funksiyasi uchun individual qiymatlar tebranib turgan bo‘lsa-da, o‘rtachalashtirish orqali hisoblangan limit qiymati nolga yaqinlashdi:

$$L_N \approx 0.$$

Bu holat o‘rtachalashtirilgan sonli baholashning amaliy ahamiyatini tasdiqlaydi va shovqinli yoki tebranuvchi funksiyalar bilan ishlashda algoritmning ustunligini ko‘rsatadi.

Dasturiy realizatsiya natijalari hisoblash jarayonining tez va resurs talab qilmasligini ko‘rsatdi. Qadamlar soni oshgani sari aniqlik ortib bordi, biroq hisoblash murakkabligi chiziqli $O(N)$bo‘lib qoldi. Bu esa algoritmni real vaqt rejimida ishlaydigan dasturiy tizimlar uchun qulay qiladi. Sonli tajribalar natijasida aniqlanganki, belgilangan tolerantlik $\tau = 10^{-6}$bo‘lganda, ko‘pchilik funksiyalar uchun 20–30 iteratsiya yetarli bo‘lgan.

Umuman olganda, natijalar shuni ko‘rsatdiki, taklif etilgan sonli yondashuv funksiya limitini aniqlashda nazariy analiz bilan mos keluvchi, barqaror va dasturiy jihatdan samarali natijalar beradi. Ushbu usul matematik analizni o‘qitishda, hisoblash matematikasida va amaliy modellashtirish masalalarida qo‘llash uchun yetarlicha ishonchli hisoblanadi.

MUHOKAMA

Olingan sonli natijalar funksiya limitini hisoblashda qo‘llanilgan yondashuvning nazariy asoslari bilan mos kelishini ko‘rsatdi va tanlangan algoritmning barqarorligi hamda universalligini tasdiqladi. Tadqiqot davomida aniqlanganki, ketma-ket yaqinlashuvga asoslangan sonli usullar klassik ε–δ ta’rifining amaliy ekvivalenti sifatida muvaffaqiyatli ishlaydi. Xususan, argument qiymatlarini limit nuqtasiga geometrik progressiya asosida yaqinlashtirish konvergensiya tezligini oshiradi va suzuvchi nuqta aniqligi bilan bog‘liq xatoliklarni kamaytiradi. Bu holat hisoblash matematikasida keng qo‘llaniladigan adaptiv qadamli algoritmlar samaradorligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Muhokama jarayonida aniqlangan muhim jihatlardan biri shundaki, sonli limitni aniqlash faqatgina qiymatlarni hisoblash bilan cheklanmaydi, balki limitning mavjudligini tahlil qilishni ham o‘z ichiga oladi. Ikki tomonlama yaqinlashuvni alohida nazorat qilish orqali algoritm uzilish nuqtalarini ishonchli aniqladi va noto‘g‘ri musbat natijalar (false positives) ehtimolini kamaytirdi. Bu xususiyat usulni nazariy jihatdan murakkab bo‘lgan bo‘lakli funksiyalar va aniqlanmagan nuqtalarga ega modellarda ham qo‘llash imkonini beradi.

Shuningdek, o‘rtachalashtirilgan baholash mexanizmining qo‘llanilishi tebranuvchi funksiyalar uchun muhim afzallik berdi. Nazariy jihatdan limit mavjud bo‘lgan, ammo lokal tebranishlar sababli bevosita baholash qiyin bo‘lgan hollarda, o‘rtacha qiymatga asoslangan yondashuv hisoblash jarayonini barqarorlashtirdi. Bu, ayniqsa, fizik va muhandislik modellarida uchraydigan shovqinli ma’lumotlar bilan ishlashda ahamiyatlidir. Shu bilan birga, bu yondashuvning cheklovi sifatida shuni qayd etish mumkinki, juda sekin konvergent funksiyalar uchun o‘rtachalashtirish hisoblash iteratsiyalari sonini oshirishni talab qiladi.

Dasturiy realizatsiya nuqtai nazaridan qaralganda, algoritmning soddaligi va chiziqli murakkabligi uni turli dasturlash tillarida tezkor joriy etish imkonini berdi. Python va MATLAB kabi yuqori darajadagi tillarda realizatsiya qilingan sonli tajribalar hisoblash natijalarining barqarorligini koʻrsatdi va algoritmning modullashtirilgan tuzilishi uni kengaytirish yoki boshqa sonli metodlar bilan integratsiya qilish uchun qulay muhit yaratdi. Shu bilan birga, suzuvchi nuqta aniqligining chegaralari sababli juda kichik qadamlar tanlanganda hisoblash aniqligi oshmay, aksincha, dumaloqlash xatoliklari paydo boʻlishi mumkinligi aniqlandi.

Umuman olganda, muhokama natijalari shuni koʻrsatadiki, taklif etilgan sonli yondashuv funksiya limitini hisoblashda ishonchli va moslashuvchan vosita boʻlib, u nazariy analiz va amaliy hisoblashlar oʻrtasidagi tafovutni sezilarli darajada kamaytiradi. Ushbu metodni keyingi tadqiqotlarda differensial tenglamalarni sonli yechish, integral hisoblash va optimallashtirish masalalariga moslashtirish mumkin, bu esa uning qoʻllanish doirasini yanada kengaytiradi.

XULOSA

Ushbu tadqiqotda funksiya limitini aniqlash masalasi sonli usullar nuqtai nazaridan batafsil tahlil qilindi va nazariy analizning amaliy hisoblash bilan uygʻunlashgan modeli ishlab chiqildi. Oʻtkazilgan tadqiqotlar shuni koʻrsatdiki, limit tushunchasini ketma-ket yaqinlashuvga asoslangan algoritmlar orqali baholash kompyuter hisoblashlarida yuqori aniqlik va barqarorlikni ta’minlaydi. Taklif etilgan yondashuv klassik $\varepsilon\text{–}\delta$ ta’rifini bevosita qoʻllamasdan, uning mohiyatini sonli hisoblash uchun qulay shaklda ifodalashga imkon berdi.

Natijalar shuni tasdiqladiki, adaptiv qadamli yaqinlashuv va oʻrtachalashtirilgan baholash mexanizmlarining birgalikda qoʻllanilishi turli tipdagi funksiyalar, jumladan uzluksiz, uzilish nuqtasiga ega va tebranuvchi funksiyalar uchun ham ishonchli natijalar beradi. Ikki tomonlama yaqinlashuvni tekshirish orqali limitning mavjudligi yoki mavjud emasligi toʻgʻri aniqlanib, notoʻgʻri xulosalar chiqarilishining oldi olindi. Dasturiy realizatsiya natijalari algoritmning chiziqli hisoblash murakkabligiga ega ekanini va real vaqt rejimidagi hisoblashlar uchun mosligini koʻrsatdi.

Yakuniy xulosa sifatida aytish mumkinki, ishlab chiqilgan sonli metod funksiya limitini hisoblashda nazariy va amaliy yondashuvlar oʻrtasidagi tafovutni samarali bartaraf etadi. Ushbu usul matematik analizni oʻqitishda, hisoblash matematikasida, muhandislik modellarini tahlil qilishda va dasturiy modellashtirish jarayonlarida keng qoʻllanishi mumkin. Kelgusida metodni yanada takomillashtirish, xususan, avtomatik aniqlik tanlash, parallel hisoblash va mashinaviy oʻqitish algoritmlari bilan integratsiya qilish orqali uning samaradorligini oshirish mumkin.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2019). *Numerical Analysis* (10th ed.). Cengage Learning.
2. Atkinson, K. E. (2018). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). Wiley.
3. Conte, S. D., & de Boor, C. (2017). *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill.
4. Kreyszig, E. (2017). *Advanced Engineering Mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons.
5. Quarteroni, A., Sacco, R., & Saleri, F. (2020). *Numerical Mathematics* (2nd ed.). Springer.
6. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2019). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education.

7. Usmonov, R. T. (2021). Sonli usullar yordamida matematik analiz masalalarini yechish. *O'zbekiston matematika jurnali*, 3(2), 45–56.
8. Karimov, B. A. (2020). Hisoblash matematikasida limit va uzluksizlikni sonli baholash. *NamDU ilmiy axborotlari*, 11(4), 88–97.
9. Odilov, N. M. (2022). Kompyuter yordamida matematik analiz masalalarini modellashtirish. *Axborot texnologiyalari va matematika*, 6(1), 61–70.
10. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2021). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.