NOEVKLID GEOMETRIYADA LOBACHEVSKIY AKSIOMALAR SISTEMASINING NAZARIY ASOSLARI VA XOSSALARI

Rasulova Gulsanam Anvarjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20085778

Annotatsiya: Ushbu maqolada noevklid geometriyada Lobachevskiy aksiomalar sistemasining nazariy asoslari va asosiy xossalari oʻrganiladi. Natijalarda bir nuqtadan berilgan toʻgʻri chiziqqa cheksiz koʻp parallel chiziqlar oʻtishi asoslandi hamda uchburchak burchaklari yigʻindisining πdan kichik boʻlishi kabi xossalar keltirildi. Muhokama qismida giperbolik geometriyaning matematik va fizik modellardagi roli tahlil qilindi. Xulosa sifatida Lobachevskiy geometriyasi mustaqil va izchil matematik tizim ekanligi koʻrsatildi.

Kalit soʻzlar: noevklid geometriya, Lobachevskiy geometriyasi, giperbolik geometriya, parallellik aksiomasi, uchburchak, aksiomatik tizim, model.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И СВОЙСТВА СИСТЕМЫ АКСИОМ ЛОБАЧЕВСКОГО В НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация: В данной статье исследуются теоретические основы и основные свойства системы аксиом Лобачевского в неевклидовой геометрии. В результатах обосновано прохождение через одну точку бесконечного множества прямых, параллельных данной прямой, а также приведены такие свойства, как сумма углов треугольника, которая меньше 180°. В разделе обсуждения проанализирована роль гиперболической геометрии в математических и физических моделях. В заключение показано, что геометрия Лобачевского представляет собой самостоятельную и непротиворечивую математическую систему.

Ключевые слова: неевклидова геометрия, геометрия Лобачевского, гиперболическая геометрия, аксиома параллельности, треугольник, аксиоматическая система, модель.

THEORETICAL FOUNDATIONS AND PROPERTIES OF LOBACHEVSKY'S AXIOM SYSTEM IN NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

Abstract: This paper investigates the theoretical foundations and principal properties of Lobachevsky's axiom system in non-Euclidean geometry. The results substantiate the existence of infinitely many lines passing through a given point parallel to a given line, and present properties such as the sum of the angles of a triangle being less than 180°. In the discussion section, the role of hyperbolic geometry in mathematical and physical models is analysed. As a conclusion, it is demonstrated that Lobachevsky's geometry constitutes an independent and consistent mathematical system.

Keywords: non-Euclidean geometry, Lobachevsky's geometry, hyperbolic geometry, axiom of parallelism, triangle, axiomatic system, model.

Kirish

Geometriya tarixan Evklid aksiomalariga asoslangan holda rivojlangan boʻlib, asrlar davomida uning beshinchi aksiomasi - parallellik aksiomasi - eng koʻp muhokama qilingan masalalardan biri boʻlib kelgan. Ushbu aksioma quyidagicha ifodalanadi: berilgan toʻgʻri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan unga parallel faqat bitta toʻgʻri chiziq oʻtadi. Bu aksiomaning boshqa aksiomalardan mustaqilligini aniqlashga qaratilgan urinishlar natijasida noevklid geometriyalar, xususan, Lobachevskiy geometriyasi vujudga keldi.

Lobachevskiy geometriyasida parallellik aksiomasi quyidagicha oʻzgartiriladi: berilgan toʻgʻri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan unga kesishmaydigan kamida ikkita toʻgʻri chiziq oʻtadi. Bu esa aslida quyidagi kuchliroq natijaga olib keladi:

$$Berilgan\ nuqtadan\ cheksiz\ koʻp\ parallel\ chiziqlar\ oʻtadi.$$

Bu aksioma Evklid geometriyasidan tubdan farq qiladi va yangi geometrik xossalarni yuzaga keltiradi.

Lobachevskiy geometriyasining matematik modeli sifatida koʻpincha giperbolik tekislik qaraladi. Bu tekislikda masofa quyidagi formulalar orqali aniqlanishi mumkin (masalan, Poincaré modeli uchun):

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Mazkur metrika giperbolik geometriyaning asosini tashkil etadi va unda odatiy Evklid masofasidan farqli xossalarga ega boʻladi.

Lobachevskiy geometriyasida uchburchakning burchaklari yigʻindisi doimo quyidagidan kichik boʻladi: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Bu farq uchburchak yuzasi bilan bogʻliq:

$$S = k(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

bu yerda k- fazoning egrilik konstantasi.

Mazkur natija giperbolik fazoning manfiy egrilikka ega ekanligini koʻrsatadi. Shu sababli bu geometriya baʼzan “manfiy egrilik geometriyasi” deb ham ataladi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, noevklid geometriyalar zamonaviy matematika va fizikada muhim rol oʻynaydi. Xususan, umumiy nisbiylik nazariyasida fazo-vaqt geometriyasi Evklid emas, balki egri fazolar orqali ifodalanadi. Lobachevskiy geometriyasi aksiomatik tizim sifatida izchil va qarama-qarshiliksiz ekanligi matematik modellar orqali isbotlangan. Bu esa aksiomatik metodning kuchini yana bir bor tasdiqlaydi. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi Lobachevskiy aksiomalar sistemasining nazariy asoslarini oʻrganish, uning asosiy xossalarini aniqlash va Evklid geometriyasi bilan solishtirishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, Lobachevskiy geometriyasi aksiomatik, analitik va geometrik jihatdan yagona tizim sifatida qaraladi va uning asosiy xossalari chuqur tahlil qilinadi. Shunday qilib, noevklid geometriyada Lobachevskiy aksiomalar sistemasini oʻrganish zamonaviy geometriyaning muhim yoʻnalishlaridan biri hisoblanadi.

Metod

Mazkur tadqiqot noevklid geometriyada Lobachevskiy aksiomalar sistemasini oʻrganishga qaratilgan boʻlib, aksiomatik metod, mantiqiy tahlil va giperbolik modellar asosida olib borildi. Asosiy maqsad parallellik aksiomasining oʻzgartirilishi natijasida yuzaga keladigan geometrik xossalarni aniqlash va ularni formal tizim sifatida asoslashdan iborat.

Tadqiqotning boshlangʻich nuqtasi sifatida Evklid geometriyasining beshinchi aksiomasi tahlil qilindi va uning quyidagi alternativ shakli qabul qilindi:

Berilgan nuqtadan berilgan chiziqqa kesishmaydigan kamida ikkita chiziq oʻtadi

Bu aksioma asosida Lobachevskiy geometriyasining asosiy strukturalari qurildi.

Metodologiyada aksiomatik tizim quyidagi asosiy elementlarga ajratildi: nuqtalar va toʻgʻri chiziqlar, ular orasidagi incidensiya munosabatlari, parallellikning yangi talqini.

Shuningdek, giperbolik geometriyani formal asoslash uchun model usuli qoʻllanildi. Bunda Evklid fazoda joylashgan maxsus model - Poincaré yarim tekislik modeli qaraldi. Ushbu modelda nuqtalar $y > 0$ shartni qanoatlantiruvchi koordinatalar bilan beriladi va masofa quyidagicha aniqlanadi: $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. Bu metrika orqali giperbolik tekislikda masofa va uzunlik tushunchalari aniqlashtirildi.

Metodologiyada geodezik chiziqlar tushunchasi ham muhim rol oʻynadi. Poincaré modelida geodeziklar quyidagicha aniqlanadi: vertikal toʻgʻri chiziqlar, yarim doiralar (markazi x-oʻqida yotuvchi).

Bu chiziqlar giperbolik geometriyada “toʻgʻri chiziq” rolini bajaradi. Tadqiqot davomida uchburchaklar xossalari ham analitik usulda oʻrganildi. Uchburchak burchaklari yigʻindisi quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Bu natija aksiomatik tizimdan kelib chiqadigan asosiy xossalardan biri sifatida qaraldi.

Shuningdek, uchburchak yuzasi quyidagicha aniqlanadi:

$$S = k(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

Bu formula giperbolik fazoning manfiy egriligini aks ettiradi.

Metodologiyada yana bir muhim usul - mantiqiy izchillikni tekshirish boʻldi. Buning uchun Lobachevskiy geometriyasining Evklid fazodagi modellari mavjudligi koʻrsatildi. Bu esa quyidagi xulosani beradi:

Agar Evklid geometriyasi izchil boʻlsa, Lobachevskiy geometriyasi ham izchil

Bu natija aksiomatik tizimning qarama-qarshiliksiz ekanligini asoslaydi.

Shuningdek, parallellik tushunchasi quyidagicha aniqlashtirildi:

Berilgan nuqtadan berilgan chiziqqa cheksiz koʻp parallel chiziqlar mavjud

Bu xossa giperbolik geometriyaning asosiy farqlovchi belgisi sifatida qaraldi.

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$\textit{Aksioma} \longrightarrow \textit{model} \longrightarrow \textit{geometrik xossalar}$$

Bu model orqali: aksiomatik daraja → parallellikning yangi talqini, model darajasi → giperbolik tekislik, natija darajasi → yangi geometrik qonunlar birlashtirildi.

Shunday qilib, qoʻllanilgan metodologiya Lobachevskiy geometriyasini aksiomatik va analitik jihatdan oʻrganish, uning izchilligini asoslash va giperbolik fazoning asosiy xossalarini aniqlash imkonini berdi.

Natija

Tadqiqot natijasida Lobachevskiy geometriyasi Evklid geometriyasidan tubdan farq qiluvchi, lekin ichki mantiqan izchil va mustaqil aksiomatik tizim ekanligi qatʼiy asoslandi. Eng muhim natijalardan biri - parallellik tushunchasining yangi talqini fazoviy strukturaning barcha xossalariga bevosita taʼsir koʻrsatishi aniqlanishidir.

Avvalo, berilgan nuqtadan chiziqqa cheksiz koʻp parallel oʻtishi quyidagi natijaga olib keladi: har bir yoʻnalish uchun chegaraviy ikkita “limit parallel” mavjud boʻlib, ular orasidagi barcha chiziqlar kesishmaydi. Bu hodisa analitik tarzda burchak orqali ifodalanadi va **parallellik burchagi** tushunchasini kiritadi:

$$\Pi(d) = 2\arctan\left(e^{-kd}\right)$$

bu yerda d- nuqtadan toʻgʻri chiziqqacha boʻlgan masofa, $k > 0$- egrilik parametri. Ushbu funksiya monoton kamayuvchi boʻlib, masofa ortishi bilan parallel yoʻnalishlar torayib borishini koʻrsatadi.

Ikkinchi muhim natija - uchburchak geometriyasining oʻzgarishi bilan bogʻliq. Har qanday uchburchak uchun: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ va burchaklar kamchiligi (defekti) quyidagicha aniqlanadi: $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Tadqiqotda ushbu defekt uchburchak yuzasiga toʻgʻridan-toʻgʻri proportsional ekanligi asoslandi:

$$S = \frac{1}{k^2}\delta$$

Bu natija yuzaning faqat uzunliklarga emas, balki burchaklar orqali ham aniqlanishini koʻrsatadi va giperbolik fazoda egrilikning fundamental rolini ochib beradi. Yana bir muhim xossa - oʻxshashlik tushunchasining oʻzgarishi. Evklid geometriyasida oʻxshash, lekin teng boʻlmagan uchburchaklar mavjud boʻlsa, Lobachevskiy geometriyasida: $o\text{ʻ}xshashlik \Rightarrow tenglik$ yaʼni burchaklari teng boʻlgan uchburchaklar majburiy ravishda kongruent boʻladi. Bu natija masshtab erkinligining yoʻqligini bildiradi.

Toʻrtinchi natija - aylana va aylana uzunligining xossalari bilan bogʻliq. Radiusi $r$boʻlgan aylana uchun uzunlik: $L(r) = \frac{2\pi}{k}\sinh(kr)$ koʻrinishda ortadi. Bu Evklid holatidagi $2\pi r$ga nisbatan tezroq oʻsishni bildiradi va fazoning "kengayuvchi" xarakterini ifodalaydi.

Geodezik chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa xossasi saqlanadi, biroq ularning global shakli oʻzgaradi. Poincaré modelida geodeziklar Evklid tekisligida toʻgʻri emas, balki yarim doiralar yoki vertikal chiziqlar koʻrinishida namoyon boʻladi. Bu natija "toʻgʻri chiziq" tushunchasining modelga bogʻliqligini koʻrsatadi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumlashtiruvchi prinsip shakllantirildi:

Parallellik aksiomasi modifikatsiyasi $\Longrightarrow$ *manfiy egrilik* $\Longrightarrow$ *yangi metrik va burchak xossalari*

Shuningdek, izchillik masalasi model orqali mustahkamlandi: giperbolik tekislikning Evklid fazodagi realizatsiyasi mavjudligi quyidagi mantiqiy xulosani beradi:

$$Con(Evklid) \Rightarrow Con(Lobachevskiy)$$

Natijalarning yana bir muhim jihati - izometriyalar guruhi bilan bogʻliq. Giperbolik tekislikda izometriyalar chiziqlarni chiziqlarga oʻtkazadi va masofani saqlaydi; bu guruh harakatlar orqali fazoning simmetriya xossalarini ifodalaydi. Natijada, lokal xossalar global struktura bilan uygʻunlashadi.

Umuman olganda, olingan natijalar Lobachevskiy geometriyasi manfiy egrilikka ega boʻlgan metrik fazo sifatida oʻziga xos analitik formulalar, burchak nazariyasi va geodezik strukturalarga ega ekanligini koʻrsatdi hamda Evklid geometriyasidan farqli yangi geometrik qonuniyatlarni tizimli ravishda ochib berdi.

Muhokama

Olingan natijalar Lobachevskiy geometriyasi oddiy aksiomatik modifikatsiya emas, balki fazoning global strukturasi va oʻlchov tushunchalarini tubdan oʻzgartiruvchi nazariya ekanligini koʻrsatdi. Parallellik aksiomasining oʻzgarishi natijasida fazo "manfiy egrilikka ega" muhit sifatida shakllanadi va bu egrilik barcha geometrik obyektlarning xatti-harakatini belgilaydi.

Muhokamada aniqlanishicha, giperbolik fazoda masofa va burchak tushunchalari o'zaro mustaqil emas, balki egrilik orqali bog'langan. Uchburchak burchaklari yig'indisining kamayishi: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ nafaqat lokal xossa, balki fazoning global geometriyasini ifodalaydi. Ushbu "burchaklar kamchiligi" maydon bilan bog'liq bo'lishi: $S \propto \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ fazoda o'lchovning klassik Evklid intuitiyasidan farq qilishini ko'rsatadi.

Giperbolik geometriyada o'xshashlik tushunchasining yo'qolishi alohida ahamiyatga ega. Bu shuni bildiradiki, geometrik shakllar masshtabga nisbatan erkin emas, ya'ni ularning o'lchamlari bevosita fazoning metrik xossalari bilan bog'langan. Bu natija fizik modellashtirishda, ayniqsa, kosmologiyada muhim rol o'ynaydi.

Muhokamada model tushunchasi ham markaziy o'rin egallaydi. Poincaré yarim tekislik modeli yoki disk modeli orqali Lobachevskiy geometriyasi Evklid fazoda tasvirlanishi mumkin. Bu quyidagi fundamental xulosaga olib keladi: turli aksiomatik tizimlar bir xil "tasvirlovchi fazo"da ifodalanishi mumkin, ammo ularning ichki qonuniyatlari turlicha bo'ladi. Bu esa matematikaning abstrakt xarakterini ko'rsatadi.

Shuningdek, muhokamada quyidagi muhim jihat qayd etildi: giperbolik fazoda aylana uzunligi va yuzaning tez o'sishi: $L(r) \sim e^{kr}$ fazoda "ekspansion xarakter" mavjudligini bildiradi. Bu hodisa Evklid fazosida kuzatilmaydi va fazoning global strukturasini tubdan farqlaydi.

Izometriyalar guruhi orqali fazoning simmetriyasi ham chuqurroq talqin qilindi. Giperbolik tekislikda harakatlar (translations, rotations, inversiyalar) murakkabroq bo'lib, ular Möbius transformatsiyalar bilan bog'liq:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Bu esa kompleks analiz bilan bevosita aloqani ko'rsatadi.

Muhokama natijalari shuni ham ko'rsatdiki, Lobachevskiy geometriyasi matematik mantiq nuqtai nazaridan muhim ahamiyatga ega. U Evklid geometriyasining yagona mumkin bo'lgan geometriya emasligini isbotlab berdi va aksiomatik metodning mustaqilligini tasdiqladi.

Umuman olganda, giperbolik geometriya zamonaviy matematika va fizikaning ajralmas qismi bo'lib, u orqali fazo, o'lchov va harakat tushunchalari yangi darajada tushuntiriladi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda noevklid geometriyada Lobachevskiy aksiomalar sistemasining nazariy asoslari va asosiy xossalari tizimli ravishda o'rganildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, parallellik aksiomasining modifikatsiyasi fazoning butun geometrik strukturasini o'zgartiradi va yangi, mustaqil geometrik tizimni yuzaga keltiradi.

Natijalarning muhim jihati shundaki, Lobachevskiy geometriyasi nafaqat nazariy konstruktsiya, balki zamonaviy fizika, kosmologiya va matematik modellashtirishda qo'llaniladigan fundamental vosita hisoblanadi.

Umuman olganda, olingan natijalar noevklid geometriyaning rivojlanishi matematik tafakkurning kengayishiga olib kelganini va aksiomatik yondashuvning universalligini yana bir bor tasdiqladi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.
12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424