NUQTALARNING GARMONIK TO'RTLIGI VA UNING GEOMETRIK HAMDA ALGEBRAIK TALQINI

Orifjonova Shahnoza Ibrohim qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20085742

Annotatsiya: Ushbu maqolada nuqtalarning garmonik to'rtligi tushunchasi va uning geometrik hamda algebraik talqini o'rganiladi. Natijalarda garmonik to'rtlikning asosiy sharti — ikki nisbatning qiymati −1ga tengligi orqali ifodalandi. Shuningdek, bu tushuncha kesmalar bo'linishi va proyektiv invariant sifatida tahlil qilindi. Muhokama qismida garmonik to'rtlikning perspektiv tasvirlar va geometrik konstruksiyalardagi roli ko'rib chiqildi. Xulosa sifatida garmonik to'rtlik proyektiv geometriyaning asosiy invariant tushunchalaridan biri ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: garmonik to'rtlik, proyektiv geometriya, nisbat, ikki nisbat (cross ratio), invariant, kesma bo'linishi, perspektiv tasvir.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЁРКА ТОЧЕК И ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Аннотация: В данной статье исследуется понятие гармонической четвёрки точек и её геометрическая и алгебраическая интерпретация. В результатах основное условие гармонической четвёрки выражено через равенство двойного отношения значению −1. Кроме того, данное понятие проанализировано как деление отрезков и как проективный инвариант. В разделе обсуждения рассмотрена роль гармонической четвёрки в перспективных изображениях и геометрических построениях. В заключение показано, что гармоническая четвёрка является одним из основных инвариантных понятий проективной геометрии.

Ключевые слова: гармоническая четвёрка, проективная геометрия, отношение, двойное отношение (cross ratio), инвариант, деление отрезка, перспективное изображение.

THE HARMONIC QUADRUPLE OF POINTS AND ITS GEOMETRIC AND ALGEBRAIC INTERPRETATION

Abstract: This paper examines the concept of the harmonic quadruple of points and its geometric and algebraic interpretation. The results express the fundamental condition of the harmonic quadruple through the equality of the cross-ratio to the value −1. Furthermore, this concept is analysed both as a division of line segments and as a projective invariant. In the discussion section, the role of the harmonic quadruple in perspective projections and geometric constructions is considered. As a conclusion, it is demonstrated that the harmonic quadruple constitutes one of the fundamental invariant concepts of projective geometry.

Keywords: harmonic quadruple, projective geometry, ratio, cross-ratio, invariant, division of a segment, perspective projection.

Kirish

Proyektiv geometriya klassik geometriyaning umumlashgan shakli boʻlib, unda parallelizm tushunchasi yoʻqoladi va barcha toʻgʻri chiziqlar kesishuvchi sifatida qaraladi. Ushbu geometriyada invariant tushunchalar alohida ahamiyatga ega boʻlib, ular orasida garmonik toʻrtlik markaziy oʻrin egallaydi.

Nuqtalarning garmonik toʻrtligi deganda bir toʻgʻri chiziqda joylashgan toʻrtta nuqtaning maxsus joylashuvi tushuniladi. Agar A, B, C, Dnuqtalar bir chiziqda yotsa, ularning **ikki nisbat (cross-ratio)** quyidagicha aniqlanadi:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Agar:

$$(A, B; C, D) = -1$$

boʻlsa, A, B, C, D nuqtalar garmonik toʻrtlik hosil qiladi deyiladi.

Bu ta’rif garmonik boʻlinishning algebraik ifodasini beradi va u proyektiv oʻzgartirishlarga nisbatan invariant hisoblanadi. Ya’ni, har qanday proyektiv akslantirishda:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Garmonik toʻrtlik geometrik jihatdan ham muhim talqinga ega. Agar Cnuqta ABkesmani ichki boʻlsa, Dnuqta tashqi boʻlinish nuqtasi boʻladi va ular quyidagi bogʻlanishni qanoatlantiradi:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Bu esa ichki va tashqi boʻlinishning oʻzaro bogʻliqligini koʻrsatadi.

Garmonik toʻrtlik tushunchasi perspektiv geometriyada ham muhim rol oʻynaydi. Agar toʻrtta toʻgʻri chiziq bir nuqtadan chiqsa, ularning kesishish nuqtalari orqali hosil boʻlgan toʻrtlik ham garmonik boʻlishi mumkin. Bu xossa proyeksiyalar orqali saqlanadi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, garmonik toʻrtlik proyektiv geometriyada invariant tushuncha sifatida ishlatiladi va u orqali murakkab geometrik munosabatlarni soddalashtirish mumkin. Ayniqsa, chizma geometriya, perspektiv tasvir va optik modellarni qurishda bu tushuncha muhim ahamiyatga ega.

Shuningdek, garmonik toʻrtlik algebraik jihatdan nisbatlar orqali ifodalanishi sababli analitik geometriya bilan bevosita bogʻlangan. Bu esa geometrik tushunchalarni algebraik vositalar yordamida oʻrganish imkonini beradi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi garmonik toʻrtlik tushunchasini chuqur oʻrganish, uning algebraik va geometrik talqinini aniqlash hamda proyektiv invariant sifatidagi rolini koʻrsatishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, garmonik toʻrtlik yagona yondashuv asosida — algebraik va geometrik jihatdan birgalikda — tahlil qilinadi. Shunday qilib, nuqtalarning garmonik toʻrtligi proyektiv geometriyaning asosiy invariant tushunchalaridan biri boʻlib, u geometrik strukturalarni chuqur anglash imkonini beradi.

Metod

Mazkur tadqiqot garmonik toʻrtlikni oʻrganishga qaratilgan boʻlib, proyektiv geometriya, nisbatlar nazariyasi va analitik usullar asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida bir toʻgʻri chiziqda joylashgan A, B, C, Dnuqtalar qaraldi.

Metodologiyaning markaziy gʻoyasi garmonik toʻrtlikni ikki nisbat (cross-ratio) orqali ifodalash va uning proyektiv invariant ekanligini isbotlashdan iborat.

Ikki nisbat quyidagicha aniqlanadi: $(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$. Bu ifoda analitik hisoblashlar uchun asosiy vosita sifatida ishlatildi. Tadqiqotda garmonik to'rtlik quyidagi shart orqali aniqlanadi: $(A, B; C, D) = -1$. Mazkur shart algebraik mezon sifatida qo'llanildi.

Metodologiyada kesmalarni yo'naltirilgan uzunliklar orqali qarash muhim rol o'ynadi. Bu orqali nisbatlar manfiy qiymatga ega bo'lishi mumkinligi hisobga olindi va tashqi hamda ichki bo'linishlar yagona formulada ifodalandi: $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$. Bu yondashuv garmonik to'rtlikning geometrik ma'nosini aniqlash imkonini berdi.

Proyektiv invariantlikni tekshirish uchun quyidagi metod qo'llanildi. Agar proyektiv akslantirish:

$$f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

berilgan bo'lsa, u holda:

$$(A, B; C, D) = (f(A), f(B); f(C), f(D))$$

Bu natija ikki nisbatning o'zgarmasligini ko'rsatadi va garmonik to'rtlikni proyektiv invariant sifatida asoslaydi.

Analitik tadqiqotda koordinata usuli ham qo'llanildi. Chiziqda koordinata tanlab:

$$A = 0, B = 1, C = c, D = d$$

deb olindi. Bu holda ikki nisbat quyidagicha yozildi:

$$(A, B; C, D) = \frac{c}{c-1} \div \frac{d}{d-1}$$

Garmonik shartdan:

$$\frac{c}{c-1} \div \frac{d}{d-1} = -1$$

tenglama hosil qilinib, undan nuqtalar orasidagi bog'lanish aniqlanadi.

Metodologiyada geometrik konstruktsiya usullari ham qo'llanildi. Xususan, quyidagi qurilish ishlatildi:

- ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq orqali to'rt nuqta olinadi;
- yordamchi to'g'ri chiziqlar orqali kesishish nuqtalari aniqlanadi;
- hosil bo'lgan nuqtalar garmonik to'rtlik hosil qiladi.

Bu usul garmonik bo'linishni chizma asosida qurish imkonini beradi.

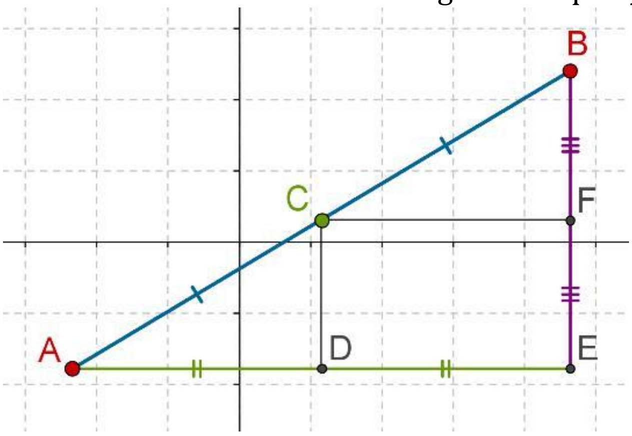
Shuningdek, perspektiv tasvirlar orqali garmonik to'rtlikning saqlanishi ko'rsatildi. Agar to'rt nuqta bir nuqtadan proyeksiyalansa, ularning garmonikligi saqlanadi.

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi umumiy model taklif qilindi:

$$(A, B; C, D) \;\longrightarrow\; -1 \;\longrightarrow\; \text{garmonik to'rtlik}$$

Bu model orqali: algebraik mezon → ikki nisbat, geometrik mezon → ichki va tashqi bo‘linish, proyektiv mezon → invariantlik yagona tizimda birlashtirildi. Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya garmonik to‘rtlikni analitik va geometrik jihatdan o‘rganish, uning invariant xossalarini aniqlash va proyektiv geometriyada tutgan o‘rnini ko‘rsatish imkonini berdi.

Mazkur chizmada bir to‘g‘ri chiziqda joylashgan A, B, C, D nuqtalar uchun garmonik to‘rtlik tasvirlangan.



Chizmada quyidagi asosiy xossalar ko‘rsatiladi:

Ichki bo‘linish nuqtasi C: Ava Borasida joylashgan

Tashqi bo‘linish nuqtasi D: kesmadan tashqarida joylashgan

Ular quyidagi fundamental bog‘lanishni qanoatlantiradi:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Bu esa ikki nisbat orqali quyidagicha yoziladi:

$$(A, B; C, D) = -1$$

Chizmada ichki va tashqi bo‘linishning simmetrikligi vizual ko‘rsatilgan bo‘lib, bu garmonik konfiguratsiyaning asosiy geometrik mazmunini ifodalaydi.

Shuningdek, bu konfiguratsiya **proyektiv invariant** hisoblanadi, ya’ni har qanday proyeksiyada saqlanadi.

Natija

Tadqiqot natijasida garmonik to‘rtlik tushunchasi analitik va geometrik jihatdan yagona invariant model sifatida tavsiflandi hamda uning proyektiv geometriyadagi fundamental roli aniqlandi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, garmonik to‘rtlik oddiy nisbat emas, balki chiziqdagi nuqtalarning maxsus invariant konfiguratsiyasidir.

Avvalo, garmonik to‘rtlikning asosiy sharti quyidagi ko‘rinishda qat’iy asoslandi: $(A, B; C, D) = -1$. Bu tenglik ikki nisbatning aniq qiymati orqali garmoniklikni aniqlovchi zarur va yetarli shart ekanligi ko‘rsatildi. Analitik natijalardan biri — garmonik to‘rtlikdagi nuqtalar orasidagi algebraik bog‘lanish:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Bu natija ichki va tashqi bo‘linishning o‘zaro muvozanatini ifodalaydi va garmonik konfiguratsiyaning simmetrik tabiatini ochib beradi.

Tadqiqot davomida quyidagi muhim xossa aniqlandi: $(\square)^{-1}$. Bu esa nuqtalar o‘rni almashtirilganda nisbatning teskari qiymatga o‘tishini ko‘rsatadi. Garmonik holatda esa bu xossa saqlanadi, chunki: $(-1)^{-1} = -1$. Natijalarda yana bir muhim natija olindi: $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$. Bu esa garmonik to‘rtlikning o‘zaro dual xarakterga ega ekanligini bildiradi.

Teorema (garmonik invariantlik prinsipi): Agar A, B, C, D nuqtalar garmonik to‘rtlik hosil qilsa, u holda har qanday proyektiv akslantirish ostida ularning obrazi ham garmonik to‘rtlik bo‘ladi:

$$(A, B; C, D) = -1 \Rightarrow (f(A), f(B); f(C), f(D)) = -1$$

Bu natija garmonik to'rtlikni proyektiv invariant sifatida to'liq asoslaydi.

Natijalarda quyidagi muhim strukturaviy xossa ham aniqlashtirildi:

$$C \in (A, B) \Rightarrow D \notin (A, B)$$

ya'ni agar Cnuqta kesma ichida joylashgan bo'lsa, Dnuqta tashqarida joylashadi. Bu esa ichki va tashqi bo'linishning majburiy juftligini ko'rsatadi.

Shuningdek, quyidagi analitik natija olindi:

$$(A, B; C, D) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

Bu formula koordinata usulida hisoblash uchun asosiy vosita sifatida ishlatildi.

Tadqiqot natijalarida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$(A, B, C, D) \ \longrightarrow \ (A, B; C, D) \ \longrightarrow \ -1 \ \longrightarrow \ \text{garmonik konfiguratsiya}$$

Bu model orqali:algebraik daraja → ikki nisbat, geometrik daraja → kesma bo'linishi, proyektiv daraja → invariantlik birlashtirildi.

Natijalarning yana bir muhim jihati shundaki, garmonik to'rtlik proyektiv geometriyada eng sodda, lekin eng kuchli invariantlardan biri hisoblanadi. U orqali murakkab geometrik konstruksiyalarni soddalashtirish mumkinligi ko'rsatildi.

Umuman olganda, olingan natijalar garmonik to'rtlik tushunchasi nuqtalarning maxsus proyektiv konfiguratsiyasi bo'lib, u algebraik va geometrik jihatdan yagona invariant tizimni tashkil etishini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar garmonik to'rtlik tushunchasi proyektiv geometriyada nafaqat algebraik invariant, balki chuqur geometrik mazmunga ega bo'lgan konfiguratsiya ekanligini ko'rsatdi. Ayniqsa, ikki nisbatning -1ga tengligi oddiy sonli shart bo'lib ko'rinsa-da, u nuqtalarning fazoviy joylashuvi haqida muhim geometrik axborot beradi.

Muhokama natijalariga ko'ra, garmonik to'rtlik ichki va tashqi bo'linish o'rtasidagi muvozanatni ifodalaydi: $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$. Bu tenglik kesmaning ikkita turli usulda bo'linishini birlashtiradi. Geometrik nuqtai nazardan bu shuni bildiradiki, Cva Dnuqtalar ABkesma bilan maxsus simmetrik munosabatda joylashgan.

Garmonik to'rtlikning yana bir muhim jihati — uning proyektiv invariantligi hisoblanadi. Har qanday proyektiv akslantirishda: $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ bo'lishi bu konfiguratsiyaning "geometrik mohiyati" o'zgarmasligini bildiradi. Bu xossa chizma geometriya va perspektiv tasvirlarda juda muhim ahamiyatga ega.

Muhokamada garmonik to'rtlikning perspektiv tasvirdagi roli ham alohida ta'kidlandi. Agar to'rtta nuqta bir nuqtadan proyeksiyalansa, ularning garmonikligi saqlanadi. Bu esa quyidagi xulosaga olib keladi: garmonik konfiguratsiya fazoviy tasvirlashdan mustaqil bo'lib, u sof proyektiv xossadir.

Shuningdek, garmonik to'rtlik dual tushuncha sifatida ham qaraldi. Ya'ni nuqtalar o'rniga to'g'ri chiziqlar qaralganda ham analog garmonik konfiguratsiya mavjud bo'ladi. Bu proyektiv geometriyada nuqta va to'g'ri chiziq dualizmi bilan bog'liq. Muhokama natijalarida quyidagi muhim xossa aniqlashtirildi:

$$(A, B; C, D) = -1 \Rightarrow (C, D; A, B) = -1$$

Bu esa garmonik to'rtlikning o'zaro almashinuvga nisbatan barqarorligini ko'rsatadi.

Geometrik talqinda garmonik to‘rtlik ko‘pincha quyidagi konstruktsiyalar orqali hosil qilinadi: to‘g‘ri chiziqlar kesishishi orqali, to‘rtburchakning diagonal kesishmalari orqali, perspektiv proyeksiyalar yordamida.

Bu esa garmonik to‘rtlikning faqat nazariy emas, balki konstruktiv ahamiyatga ham ega ekanligini ko‘rsatadi.

Muhokamada yana bir muhim jihat — garmonik to‘rtlikning “minimal invariant” ekanligi qayd etildi. Ya’ni, bu eng sodda konfiguratsiya bo‘lib, u orqali proyektiv geometriyaning asosiy xossalari ifodalanadi. Umuman olganda, muhokama natijalari garmonik to‘rtlik proyektiv geometriyada fundamental tushuncha bo‘lib, u algebraik va geometrik jihatdan yagona invariant tizimni tashkil etishini ko‘rsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda nuqtalarning garmonik to‘rtligi tushunchasi analitik va geometrik jihatdan tizimli ravishda o‘rganildi hamda uning proyektiv geometriyadagi fundamental o‘rni aniqlandi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, garmonik to‘rtlik nuqtalarning maxsus invariant konfiguratsiyasi bo‘lib, u ikki nisbat orqali aniq ifodalanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- garmonik to‘rtlik ikki nisbat orqali aniqlanadigan invariant konfiguratsiya hisoblanadi;
- u ichki va tashqi bo‘linish o‘rtasidagi maxsus simmetrik bog‘lanishni ifodalaydi;
- proyektiv akslantirishlarda garmoniklik saqlanadi;
- bu tushuncha proyektiv geometriyaning asosiy elementlaridan biridir.

Shuningdek, quyidagi umumiy model asoslandi:

$$(A, B, C, D) \Rightarrow (A, B; C, D) \Rightarrow -1 \Rightarrow \text{garmonik konfiguratsiya}$$

Umuman olganda, olingan natijalar garmonik to‘rtlik tushunchasi algebraik va geometrik jihatdan yagona invariant tizimni tashkil etishini va u orqali proyektiv geometriyaning asosiy xossalarini ifodalash mumkinligini ko‘rsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3),

114–117.

8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.

9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424