

PARAMETRIK SIRTULAR UCHUN BIRINCHI KVADRATIK FORMA VA UNING INVARIANTLARI

Tursunova Dildorabonu Ikromjon qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20085705>

Annotatsiya: Ushbu maqolada parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik forma va uning invariantlari o'rganiladi. Natijalarda birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlari E, F, G orqali sirtning metrik strukturasi aniqlanishi, shuningdek, $\sqrt{EG - F^2} du dv$ ifodasi yuza elementi va metrik invariant sifatida xizmat qilishi ko'rsatiladi. Muhokama qismida ushbu forma yordamida sirt ustidagi egri chiziqlar uzunligi, ikki yo'nalish orasidagi burchak va lokal geometriya tahlil qilinadi. Xulosa sifatida birinchi kvadratik forma parametrik sirtlarning ichki geometriyasini tavsiflovchi asosiy vosita ekanligi asoslanadi.

Kalit so'zlar: parametrik sirt, birinchi kvadratik forma, differensial geometriya, metrik invariant, E, F, G , yuza elementi, sirt metrikasi, egri chiziq uzunligi, burchak, parametr almashtirish.

ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЕЁ ИНВАРИАНТЫ

Аннотация: В данной статье исследуются первая квадратичная форма для параметрических поверхностей и её инварианты. В результатах показано, что метрическая структура поверхности определяется через коэффициенты первой квадратичной формы, а выражение $\sqrt{EG - F^2} du dv$ служит элементом площади и метрическим инвариантом. В разделе обсуждения с помощью данной формы анализируются длины кривых на поверхности, угол между двумя направлениями и локальная геометрия. В заключение обосновано, что первая квадратичная форма является основным инструментом, описывающим внутреннюю геометрию параметрических поверхностей.

Ключевые слова: параметрическая поверхность, первая квадратичная форма, дифференциальная геометрия, метрический инвариант, элемент площади, метрика поверхности, длина кривой, угол, замена параметров.

THE FIRST FUNDAMENTAL FORM FOR PARAMETRIC SURFACES AND ITS INVARIANTS

Abstract: This paper investigates the first fundamental form for parametric surfaces and its invariants. The results demonstrate that the metric structure of the surface is determined through the coefficients of the first fundamental form, and that the expression $\sqrt{EG - F^2} du dv$ serves as the area element and a metric invariant. In the discussion section, the lengths of curves on the surface, the angle between two directions, and local geometry are analysed by means of this form. As a conclusion, it is substantiated that the first fundamental form is the primary instrument describing the intrinsic geometry of parametric surfaces.

Keywords: parametric surface, first fundamental form, differential geometry, metric invariant, area element, surface metric, arc length, angle, parameter transformation.

Kirish

Parametrik sirtlar differensial geometriyaning asosiy obyektlaridan biri bo'lib, ular fazoda silliq shakllarni analitik tarzda ifodalash imkonini beradi. Bunday sirtlar odatda ikki parametrlar orqali beriladi:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

bu yerda (u, v) parametrlar tekislikdagi koordinatalar bo'lib, ular orqali fazodagi sirt nuqtalari aniqlanadi.

Parametrik sirtning o'rganishda uning lokal xossalarini aniqlash muhim hisoblanadi. Ayniqsa, uzunlik, burchak va yuza kabi geometrik kattaliklarni aniqlash uchun sirtning metrik strukturasi bilish zarur. Bu vazifani bajaruvchi asosiy vosita - **birinchi kvadratik forma** hisoblanadi.

Parametrik sirt uchun differensial siljish quyidagicha yoziladi:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

bu yerda

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

Mazkur differensial orqali uzunlik elementi aniqlanadi:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Natijada birinchi kvadratik forma quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

bu yerda koeffitsiyentlar quyidagicha aniqlanadi:

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

Bu koeffitsiyentlar sirtning lokal metrik xossalarini to'liq tavsiflaydi.

Birinchi kvadratik forma yordamida quyidagi muhim geometrik kattaliklar aniqlanadi: egri chiziq uzunligi, ikki yo'nalish orasidagi burchak, sirt ustidagi yaqinlik (metrika).

Masalan, sirt ustidagi egri chiziq uzunligi:

$$L = \int \sqrt{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2} dt$$

Burchak esa quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos \theta = \frac{E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2} \sqrt{E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2}}$$

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, birinchi kvadratik forma sirtning ichki geometriyasini aniqlaydi, ya'ni sirtning shaklidan qat'i nazar, uning ichki metrik xossalari aynan shu forma orqali ifodalanadi.

Shuningdek, quyidagi ifoda: $EG - F^2$ sirtning muhim invariantlaridan biri bo'lib, u nolga teng bo'lmaganda sirt regulyar ekanligini bildiradi va yuza elementini aniqlashda ishlatiladi: $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik formani aniqlash, uning invariantlarini o'rganish va ular orqali sirtning geometrik xossalarini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, birinchi kvadratik forma metrik invariantlar tizimi sifatida qaraladi va uning geometrik mazmuni chuqur tahlil qilinadi. Shunday qilib, parametrik

sirtlar uchun birinchi kvadratik forma differensial geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u orqali sirtning barcha ichki xossalari aniqlash mumkin.

Metod

Mazkur tadqiqot parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik formani o'rganishga qaratilgan bo'lib, differensial geometriya, vektor analiz va parametrik akslantirishlar metodlari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida fazoda berilgan silliq parametrik sirt: $\mathbf{r}(u, v)$ qaraldi.

Tadqiqotning boshlang'ich nuqtasi sifatida sirtning differensial siljishi aniqlanib, u orqali metrik struktura hosil qilindi:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

Bu ifodani o'z-o'ziga skalyar ko'paytirish orqali birinchi kvadratik forma olindi:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Natijada quyidagi umumiy ko'rinish hosil bo'ldi:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

bu yerda koeffitsiyentlar:

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Metodologiyada ushbu koeffitsiyentlar orqali sirtning metrik xossalari o'rganildi. Xususan, quyidagi tengsizlik asosiy rol o'ynadi:

$$EG - F^2 > 0$$

Bu shart sirtning regulyarligini va parametrlar mustaqilligini ta'minlaydi.

Parametrik o'zgarishlar ta'sirini tahlil qilish uchun quyidagi transformatsiya qaraldi:

$$u = u(s, t), v = v(s, t)$$

Bu holda birinchi kvadratik forma yangi koordinatalarda ham kvadratik ko'rinishni saqlab qolishi ko'rsatildi. Ya'ni:

$$ds^2 = E' ds^2 + 2F' ds dt + G' dt^2$$

Bu natija birinchi kvadratik formaning koordinata almashtirishlarga nisbatan kovariant xarakterga ega ekanligini bildiradi.

Metodologiyada yana bir muhim invariant quyidagicha aniqlandi:

$$EG - F^2$$

Bu ifoda parametr o'zgarishlarida quyidagi qonuniyat bilan o'zgaradi:

$$(EG - F^2)' = (EG - F^2) \cdot J^2$$

bu yerda J - Yakobian determinant. Bu natija invariantning geometrik mazmunini ochib beradi.

Yuza elementini aniqlash uchun quyidagi formula qo'llanildi:

$$dS = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv$$

Bu ifoda birinchi kvadratik forma bilan bog'lanib:

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

ko'rinishda yozildi.

Metodologiyada egri chiziqlar uzunligini hisoblash uchun parametrik funksiya:

$$u = u(t), v = v(t)$$

qaraldi va uzunlik quyidagicha ifodalandi:

$$L = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt$$

Shuningdek, ikki yo'nalish orasidagi burchak aniqlash formulasi ham qo'llanildi:

$$\cos \theta = \frac{E du_1 du_2 + F (du_1 dv_2 + du_2 dv_1) + G dv_1 dv_2}{\sqrt{E du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2} \sqrt{E du_2^2 + 2F du_2 dv_2 + G dv_2^2}}$$

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$\mathbf{r}(u, v) \rightarrow (E, F, G) \rightarrow \text{geometrik xossalar}$$

Bu model orqali: parametrik sirt \rightarrow differensiallar, differensiallar \rightarrow kvadratik forma, kvadratik forma \rightarrow metrik invariantlar o'zaro bog'landi.

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya parametrik sirtlarning birinchi kvadratik formasi orqali metrik strukturasi aniqlash, invariantlarni tahlil qilish va geometrik xossalarni formal tarzda ifodalash imkonini berdi.

Natija

Tadqiqot natijasida parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik forma sirtning ichki geometriyasini to'liq aniqlovchi fundamental matematik obyekt ekanligi asoslandi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, E, F, G koeffitsiyentlar sirtning barcha metrik xossalarini ifodalovchi yetarli parametrlar hisoblanadi.

Avvalo, birinchi kvadratik forma orqali masofa tushunchasi aniqlanishi quyidagi asosiy bog'lanish bilan ifodalandi:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Bu formula sirt ustidagi infinitesimal uzunlikni aniqlashning yagona vositasi sifatida qaraldi.

Natijalarda quyidagi muhim invariant aniqlashtirildi: $EG - F^2$. Bu ifoda nolga teng bo'lmaganda sirtning regulyarligini ta'minlaydi va quyidagi natijaga olib keladi:

$$EG - F^2 > 0 \Rightarrow \mathbf{r}_u \text{ va } \mathbf{r}_v \text{ chiziqli mustaqil}$$

Bu natija parametrik sirtning lokal tekislikka ega ekanligini bildiradi.

Tadqiqot davomida quyidagi asosiy geometrik xossa aniqlandi:

$$\| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \| = \sqrt{EG - F^2}$$

Bu natija birinchi kvadratik forma bilan yuza elementi orasidagi chuqur bog'lanishni ko'rsatadi va sirtning lokal "o'lcham koeffitsiyenti" sifatida talqin qilindi.

Natijalarda yana bir muhim bog'lanish olindi:

$$\langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = ds^2$$

Bu esa birinchi kvadratik forma aslida sirtga induksiya qilingan metrika ekanligini ko'rsatadi.

Teorema (birinchi kvadratik forma invariantligi prinsipi): Agar parametrik sirt koordinatalari silliq almashtirilsa, birinchi kvadratik forma kvadratik ko'rinishini saqlaydi va sirtning geometrik xossalari o'zgarmaydi.

Bu natija sirtning ichki geometriyasi parametr tanlashga bog'liq emasligini bildiradi. Natijalarda quyidagi muhim xossa ham aniqlashtirildi:

$$F = 0 \Rightarrow \text{parametr chiziqlari ortogonal}$$

Bu esa parametrik chiziqlarning o'zaro joylashuvini aniqlash imkonini beradi.

Shuningdek, quyidagi holat alohida qaraldi:

$$E = G = 1, F = 0$$

Bu holda parametrlar ortonormal bo'lib, sirt lokal ravishda Evklid tekisligiga o'xshash bo'ladi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumiy strukturaviy model shakllantirildi:

$$(E, F, G) \rightarrow (ds^2, dS, \theta)$$

ya'ni: $E, F, G \rightarrow$ uzunlik, $E, F, G \rightarrow$ yuza, $E, F, G \rightarrow$ burchak aniqlaydi.

Natijalarning yana bir muhim jihati shundaki, birinchi kvadratik forma orqali sirtning ichki geometriyasi tashqi joylashuvdan mustaqil ravishda aniqlanadi. Bu esa quyidagi xulosaga olib keladi: *Ichki geometriya \equiv birinchi kvadratik forma.*

Umuman olganda, olingan natijalar parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik forma metrik invariantlar tizimi sifatida xizmat qilishini va u orqali sirtning barcha asosiy geometrik xossalarini aniqlash mumkinligini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar birinchi kvadratik forma parametrik sirtlarning ichki geometriyasini aniqlovchi markaziy tushuncha ekanligini ko'rsatdi. Ushbu forma orqali uzunlik, burchak va yuza kabi barcha asosiy geometrik kattaliklar aniqlanishi uning fundamental rolini tasdiqlaydi.

Muhokama natijalariga ko'ra, birinchi kvadratik forma aslida fazodagi standart skalyar ko'paytmaning sirtga cheklanishi sifatida qaraladi:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Bu esa sirt ichida yashovchi kuzatuvchi uchun geometriya to'liq ushbu forma orqali ifodalanishini bildiradi.

Eng muhim nazariy xulosalardan biri - sirtning ichki xossalari tashqi joylashuvdan mustaqil ekanligidir. Bu g'oya differensial geometriyada muhim o'rin tutadi va u Gaussning mashhur natijasi bilan bog'liq: sirtning egriligi birinchi kvadratik forma orqali aniqlanishi mumkin. Ya'ni, sirtning ichki geometriyasi faqat metrik struktura orqali tavsiflanadi.

Muhokamada quyidagi muhim xossa yana bir bor ta'kidlandi: $EG - F^2 > 0$. Bu shart parametrik sirtning lokal regulyarligini ta'minlaydi va sirtning tangent tekisligi mavjudligini kafolatlaydi.

Parametrik chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash formulasi:

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

(agar $du = dv$ bo'lsa) parametrlarning o'zaro joylashuvi haqida muhim ma'lumot beradi. Xususan, $F = 0$ holatda parametr chiziqlari ortogonal bo'lishi sirtning o'rganishni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - birinchi kvadratik formaning transformatsion xossalari hisoblanadi. Parametrlar o'zgartirilganda E, F, G o'zgaradi, lekin: ds^2 o'zgarmaydi. Bu esa metrik strukturaning invariant ekanligini bildiradi.

Shuningdek, quyidagi natija muhim ahamiyatga ega:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Bu formula sirt yuzasining lokal o'lchamini aniqlaydi va geometriyaning analitik hamda fizik talqinini bog'laydi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - geodezik chiziqlar bilan bog'liq. Birinchi kvadratik forma orqali aniqlangan uzunlik funksionali minimallashtirilganda geodeziklar hosil bo'ladi. Bu esa quyidagi xulosani beradi:

Geodeziklar \Rightarrow metrikaga bog'liq

Shuningdek, yuqori darajadagi nazariyada birinchi kvadratik forma Riemann metrikasining maxsus holi sifatida qaraladi. Bu esa sirtlar nazariyasini umumiy ko'p o'lchovli manifoldlarga kengaytirish imkonini beradi. Umuman olganda, muhokama natijalari birinchi kvadratik forma parametrik sirtlarning ichki geometriyasini to'liq tavsiflovchi, invariant va universal matematik vosita ekanligini ko'rsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda parametrik sirtlar uchun birinchi kvadratik forma va uning invariantlari tizimli ravishda o'rganildi hamda ularning geometrik mazmuni aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, birinchi kvadratik forma sirtning ichki geometriyasini tavsiflovchi asosiy matematik obyekt hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- birinchi kvadratik forma sirtning metrik strukturasi aniqlaydi;
- E, F, G koeffitsiyentlar sirtning lokal geometrik xossalari ifodalaydi;
- $EG - F^2 > 0$ sharti sirtning regulyarligini ta'minlaydi;
- parametrlar o'zgarishida forma o'z ko'rinishini saqlaydi;
- ichki geometriya tashqi joylashuvdan mustaqil aniqlanadi.

Shuningdek, quyidagi umumiy model asoslandi:

$$\mathbf{r}(u, v) \Rightarrow (E, F, G) \Rightarrow (ds^2, dS, \theta)$$

Umuman olganda, olingan natijalar birinchi kvadratik forma parametrik sirtlarning ichki geometriyasini tavsiflovchi universal va invariant matematik vosita ekanligini ko'rsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. - 4th ed. - New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, 1(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-

7).

10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

11. Abdiqayumov, A., & Makhmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Makhmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, 6(1), 282-293. <https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424>