PROYEKTIV GEOMETRIYANING ASOSIY FAKTLARI, INVARIANTLARI VA ULARNING NAZARIY HAMDA AMALIY TAHLILI

Olimova Moxinur O'tkirjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20085685

Annotatsiya: Ushbu maqolada proyektiv geometriyaning asosiy faktlari, invariantlari va ularning nazariy hamda amaliy ahamiyati o'rganiladi. Natijalarda ikki nisbatning invariantligi, garmonik to'rtlik, dualizm prinsipi va proyektiv transformatsiyalar xossalari asoslandi. Shuningdek, ushbu invariantlarning chizma geometriya, kompyuter grafika va optik modellashtirishdagi roli tahlil qilindi. Xulosa sifatida proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur tushuntiruvchi fundamental nazariya ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: proyektiv geometriya, invariant, ikki nisbat, garmonik to'rtlik, perspektiv akslantirish, dualizm, proyektiv fazo, transformatsiya

ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ, ИНВАРИАНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Аннотация: В данной статье исследуются основные факты и инварианты проективной геометрии, а также их теоретическое и практическое значение. В результатах обоснованы инвариантность двойного отношения, гармоническая четвёрка, принцип двойственности и свойства проективных преобразований. Кроме того, проанализирована роль данных инвариантов в начертательной геометрии, компьютерной графике и оптическом моделировании. В заключение показано, что проективная геометрия представляет собой фундаментальную теорию, глубоко объясняющую геометрические структуры посредством инвариантов.

Ключевые слова: проективная геометрия, инвариант, двойное отношение, гармоническая четвёрка, перспективное отображение, двойственность, проективное пространство, преобразование.

FUNDAMENTAL FACTS AND INVARIANTS OF PROJECTIVE GEOMETRY AND THEIR THEORETICAL AND PRACTICAL ANALYSIS

Abstract: This paper examines the fundamental facts and invariants of projective geometry, along with their theoretical and practical significance. The results substantiate the invariance of the cross-ratio, the harmonic quadruple, the principle of duality, and the properties of projective transformations. Furthermore, the role of these invariants in descriptive geometry, computer graphics, and optical modelling is analysed. As a conclusion, it is demonstrated that projective geometry constitutes a fundamental theory that provides a deep explanation of geometric structures through invariants.

Keywords: projective geometry, invariant, cross-ratio, harmonic quadruple, perspective mapping, duality, projective space, transformation.

Kirish

Proyektiv geometriya klassik Evklid geometriyasining umumlashgan shakli bo‘lib, unda masofa va burchak kabi metrik tushunchalar ikkinchi darajaga tushiriladi, asosiy e’tibor esa **incidensiya** (nuqta–to‘g‘ri chiziq munosabatlari) va **invariantlar**ga qaratiladi. Ushbu geometriyada asosiy g‘oya - turli tasvirlashlar (proyeksiyalar) ostida saqlanib qoluvchi xossalarni aniqlashdan iborat.

Proyektiv fazoda nuqtalar gomogen koordinatalar yordamida ifodalanadi:

$$(x: y: z)$$

bu yerda $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ va barcha proporsional uchliklar bitta nuqtani ifodalaydi:

$$(x: y: z) \sim (\lambda x: \lambda y: \lambda z), \lambda \neq 0$$

Proyektiv geometriyada asosiy transformatsiyalar quyidagicha yoziladi:

$$(x: y: z) \mapsto (x': y': z') = (ax + by + cz: a'x + b'y + c'z: a''x + b''y + c''z)$$

Bu transformatsiyalar **proyektiv akslantirishlar** bo‘lib, ular to‘g‘ri chiziqlarni to‘g‘ri chiziqlarga o‘tkazadi.

Mazkur geometriyada eng muhim invariantlardan biri - **ikki nisbat (cross-ratio)** hisoblanadi. Agar A, B, C, Dnuqtalar bir chiziqda yotsa:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Ikki nisbatning asosiy xossasi: $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ ya’ni u har qanday proyektiv akslantirish ostida o‘zgarmaydi.

Maxsus holatda: $(A, B; C, D) = -1$ bo‘lsa, nuqtalar **garmonik to‘rtlik** hosil qiladi. Bu konfiguratsiya proyektiv geometriyada muhim rol o‘ynaydi.

Proyektiv geometriyaning yana bir fundamental prinsipi - **dualizm** hisoblanadi. Bu prinsipga ko‘ra, har bir teorema uchun unga dual bo‘lgan teorema mavjud:

$$\text{nuqta} \leftrightarrow \text{to‘g‘ri chiziq}$$

Masalan, “ikki nuqta orqali bitta chiziq o‘tadi” teoremasiga dual: “ikki chiziq bir nuqtada kesishadi”.

Proyektiv geometriyada invariantlar muhim rol o‘ynaydi, chunki ular tasvirlash usulidan qat’i nazar geometrik obyektlarning mohiyatini saqlab qoladi. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi proyektiv geometriyaning asosiy faktlarini, invariantlarini va ularning nazariy hamda amaliy ahamiyatini tizimli ravishda o‘rganishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, proyektiv invariantlar yagona tizim sifatida qaraladi va ularning geometrik hamda amaliy talqini chuqur tahlil qilinadi.

Shunday qilib, proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni umumlashtirish va chuqur tushunish imkonini beruvchi fundamental matematik nazariya hisoblanadi.

Metod

Mazkur tadqiqot proyektiv geometriyaning asosiy faktlari va invariantlarini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, proyektiv fazolar nazariyasi, ikki nisbat (cross-ratio), gomogen koordinatalar va transformatsiyalar metodlari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida proyektiv tekislik $\mathbb{P}^2$ va undagi nuqta hamda to‘g‘ri chiziqlar qaraldi.

Metodologiyaning boshlang‘ich nuqtasi sifatida nuqtalarni gomogen koordinatalar orqali ifodalash qabul qilindi:

$$(x: y: z) \sim (\lambda x: \lambda y: \lambda z), \lambda \neq 0$$

Bu yondashuv proyektiv fazoda nuqtalarning koordinata tanlashga bog'liq emasligini ta'minlaydi.

Proyektiv akslantirishlar umumiy chiziqli transformatsiyalar orqali berildi:

$$(x: y: z) \mapsto (x': y': z') = (ax + by + cz: a'x + b'y + c'z: a''x + b''y + c''z)$$

Bu transformatsiyalarni matritsali ko'rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, A \in GL(3)$$

Metodologiyada asosiy invariant sifatida ikki nisbat qo'llanildi. Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi A, B, C, Dnuqtalar uchun:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Ikki nisbatning invariantligi quyidagicha tekshirildi:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Bu natija proyektiv transformatsiyalar ostida asosiy geometrik munosabatlar saqlanishini ko'rsatadi.

Analitik tahlilda koordinata usuli ham qo'llanildi. Chiziqda:

$$A = 0, B = 1, C = c, D = d$$

deb olinib, ikki nisbat quyidagicha yozildi:

$$(A, B; C, D) = \frac{c}{c - 1} \div \frac{d}{d - 1}$$

Bu ifoda invariantlikni tekshirish uchun asosiy vosita sifatida ishlatildi.

Metodologiyada garmonik to'rtlik maxsus invariant holat sifatida qaraldi:

$$(A, B; C, D) = -1$$

Bu shart geometrik konstruktsiyalar orqali ham tekshirildi va ichki hamda tashqi bo'linishlar bilan bog'landi: $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$. Dualizm prinsipi metodologiyaning muhim elementi sifatida qo'llanildi. Bu prinsipga ko'ra, har bir nuqta–to'g'ri chiziq munosabati dual almashtirish orqali o'zgartirildi: nuqta $\leftrightarrow$ to'g'ri chiziq. Bu yondashuv teoremalarni ikki tomonlama tekshirish imkonini berdi.

Metodologiyada perspektiv akslantirishlar ham o'rganildi. Agar nuqtalar bir nuqtadan proyeksiyalansa, ularning kollinearligi va ikki nisbat qiymati saqlanishi ko'rsatildi. Bu esa proyektiv geometriyaning asosiy prinsipi - invariantlikni tasdiqlaydi.

Shuningdek, quyidagi asosiy xossalar tekshirildi: to'g'ri chiziqlar to'g'ri chiziqlarga o'tadi, kesishish xossalari saqlanadi, parallel chiziqlar cheksizlikdagi nuqtada kesishadi.

Bu oxirgi xossa proyektiv tekislikning kengaytirilganligini bildiradi:

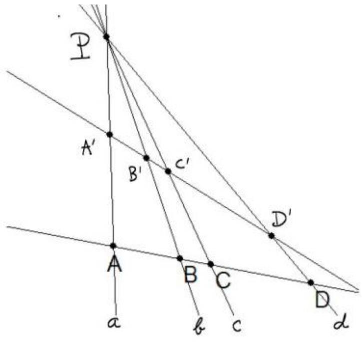
$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{cheksizlikdagi nuqtalar}\}$$

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi umumiy model shakllantirildi: *geometrik obyekt* $\longrightarrow$ *transformatsiya* $\longrightarrow$ *invariant.*

Bu model orqali: nuqtalar va chiziqlar → proyektiv akslantirishlar, akslantirishlar → invariantlar, invariantlar → geometrik xossalar o'zaro bog'landi.

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya proyektiv geometriyada invariant tushunchasini aniqlash, ularning saqlanish qonunlarini tekshirish va geometrik hamda analitik talqinini berish imkonini berdi.

Mazkur chizmada proyektiv geometriyaning asosiy prinsipi - **proyektiv akslantirish ostida invariantlarning saqlanishi** tasvirlangan.



Chizmada:

- bir to‘g‘ri chiziqda joylashgan A, B, C, D nuqtalar
- ularning boshqa chiziqqa proyeksiyasi A', B', C', D'
- proyeksiya markazi orqali o‘tuvchi chiziqlar

ko‘rsatilgan.

Asosiy invariant quyidagicha ifodalanadi: $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Bu tenglik shuni bildiradiki, nuqtalar qanday proyeksiyalansa ham, ularning ikki nisbat qiymati o‘zgarmaydi. Agar: $(A, B; C, D) = -1$ bo‘lsa, chizmada garmonik to‘rtlik hosil bo‘ladi va bu konfiguratsiya ham proyeksiyada saqlanadi.

Natija

Tadqiqot natijasida proyektiv geometriyada invariantlar tushunchasi geometrik strukturalarni aniqlovchi asosiy omil ekanligi aniqlandi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, proyektiv akslantirishlar ostida saqlanuvchi kattaliklar orqali geometrik obyektlarning mohiyati to‘liq tavsiflanadi.

Avvalo, ikki nisbat (cross-ratio) proyektiv geometriyaning asosiy invariantidir:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

va u quyidagi xossani qanoatlantiradi:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Bu natija shuni ko‘rsatadiki, to‘rtta nuqtaning proyektiv joylashuvi aynan ikki nisbat orqali aniqlanadi.

Teorema (proyektiv invariantlik prinsipi): Agar geometrik konfiguratsiya proyektiv transformatsiya ostida saqlansa, u invariantlar orqali to‘liq tavsiflanadi.

Bu teorema invariantlar nazariyasining markaziy g‘oyasini ifodalaydi.

Natijalarda garmonik to‘rtlik alohida invariant konfiguratsiya sifatida qaraldi:

$$(A, B; C, D) = -1$$

Bu holat ichki va tashqi bo‘linishlar o‘rtasidagi maxsus simmetriyani ifodalaydi va quyidagi bog‘lanish bilan aniqlanadi:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Shuningdek, quyidagi muhim xossa aniqlashtirildi:

$$(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$$

Bu esa konfiguratsiyaning o‘zaro simmetrikligini ko‘rsatadi.

Natijalarda dualizm prinsipi ham muhim rol o‘ynashi ko‘rsatildi. Har bir teorema uchun unga dual teorema mavjud bo‘lib, bu quyidagi umumiy moslik orqali ifodalanadi: nuqta $\leftrightarrow$ to‘g‘ri chiziq. Bu natija proyektiv geometriyada teoremalar sonini “ikki barobar” ko‘paytirish imkonini beradi.

Tadqiqot davomida quyidagi strukturaviy model shakllantirildi:

$$\text{proyektiv transformatsiya} \Rightarrow \text{invariantlar} \Rightarrow \text{geometrik xossalar}$$

Bu model invariantlarning asosiy rolini ko‘rsatadi.

Natijalarning yana bir muhim jihati - cheksizlikdagi nuqtalar tushunchasining qoʻllanilishi hisoblanadi: parallel chiziqlar $\Rightarrow$ cheksizlikda kesishadi. Bu natija proyektiv tekislikni yopiq geometrik tizimga aylantiradi.

Shuningdek, quyidagi muhim xulosa olindi:

metrik xossalar oʻzgaradi, lekin proyektiv invariantlar saqlanadi

Bu esa proyektiv geometriyaning metrik geometriyadan asosiy farqini koʻrsatadi.

Natijalarda invariantlar orqali geometrik masalalarni soddalashtirish mumkinligi ham asoslandi. Masalan, murakkab proyeksion tasvirlarda nuqtalar oʻrtasidagi munosabatlar aynan ikki nisbat orqali aniqlanadi. Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv geometriyada invariantlar geometrik strukturalarni tavsiflovchi asosiy vosita ekanligini va ular orqali murakkab geometrik munosabatlarni soddalashtirish mumkinligini koʻrsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar proyektiv geometriyada invariantlar tushunchasi geometrik obyektlarning eng muhim xossalarini aniqlovchi asosiy vosita ekanligini koʻrsatdi. Ayniqsa, ikki nisbat (cross-ratio) invariant sifatida barcha proyektiv transformatsiyalar ostida saqlanishi ushbu nazariyaning markaziy gʻoyasini tashkil etadi.

Muhokama natijalariga koʻra, proyektiv geometriya metrik tushunchalardan mustaqil boʻlib, u geometrik obyektlarning faqat oʻzaro joylashuviga asoslanadi. Shu sababli masofa va burchak oʻzgarishi mumkin, lekin: $(A, B; C, D)$ qiymati oʻzgarmaydi. Bu esa invariantlarning geometrik “mohiyatni saqlovchi” rolini koʻrsatadi.

Garmonik toʻrtlik: $(A, B; C, D) = -1$ maxsus invariant konfiguratsiya sifatida qaralib, u koʻplab geometrik konstruktsiyalarda markaziy oʻrin egallaydi. Muhokamada aniqlanishicha, bu konfiguratsiya simmetrik boʻlinish va proyektiv muvozanatni ifodalaydi.

Dualizm prinsipi proyektiv geometriyaning eng chuqur gʻoyalaridan biri sifatida baholandi. Nuqta va toʻgʻri chiziq oʻrtasidagi quyidagi moslik:

nuqta $\leftrightarrow$ toʻgʻri chiziq

geometrik teoremalarni umumlashtirish va soddalashtirish imkonini beradi. Bu esa nazariy jihatdan kuchli metod hisoblanadi.

Muhokamada proyektiv transformatsiyalar quyidagi umumiy koʻrinishda qaraldi:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Bu transformatsiyalar kompleks analiz bilan bogʻliq boʻlib, invariantlarning chuqur algebraik asosga ega ekanligini koʻrsatadi. Muhokamada yana bir muhim jihat - cheksizlikdagi nuqtalar tushunchasi hisoblanadi. Proyektiv tekislikda parallel chiziqlar: *cheksizlikdagi nuqtada kesishadi.*

Bu esa geometriyani yopiq va simmetrik tizimga aylantiradi. Shuningdek, proyektiv geometriya affine va Evklid geometriyalarni umumlashtiruvchi tizim sifatida qaraldi. Ya’ni: Evklid $\subset$ affin $\subset$ proyektiv. Bu ierarxiya invariantlar orqali tushuntiriladi.

Muhokama natijalari shuni koʻrsatdiki, proyektiv invariantlar nafaqat nazariy tushuncha, balki real dunyodagi tasvirlash, modellashtirish va analiz jarayonlarida muhim rol oʻynaydi. Umuman olganda, proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur anglash imkonini beruvchi universal matematik vosita hisoblanadi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda proyektiv geometriyaning asosiy faktlari, invariantlari va ularning nazariy hamda amaliy ahamiyati tizimli ravishda oʻrganildi. Olingan natijalar shuni koʻrsatdiki, proyektiv geometriyada invariantlar geometrik obyektlarning eng muhim xossalarini aniqlovchi asosiy vosita hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- proyektiv transformatsiyalar geometrik obyektlarning joylashuvini oʻzgartiradi, lekin invariantlarni saqlaydi;
- ikki nisbat proyektiv geometriyaning asosiy invariantidir;
- garmonik toʻrtlik maxsus invariant konfiguratsiya hisoblanadi;
- dualizm prinsipi nazariy tahlilni soddalashtiradi;
- proyektiv geometriya metrik geometriyalarni umumlashtiradi.

Shuningdek, quyidagi umumiy model asoslandi:

$$\text{transformatsiya} \Rightarrow \text{invariant} \Rightarrow \text{geometrik xossalar}$$

Natijalarning muhim jihati shundaki, invariantlar orqali geometrik obyektlarning mohiyati tasvirlash usulidan mustaqil ravishda aniqlanadi.

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur tushuntiruvchi fundamental nazariya ekanligini koʻrsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ʻpo ʻlchovli yevklid fazosi: o ʻqitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in

Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424