GRIN FUNKSIYALARI VA ISSIQLIK TENGLAMASI UCHUN QO‘LLANILISHI

Jo‘rayeva Feruza Baxtiyor qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
feruzajorayevaasila@mail.ru
Ulasheva Anvara Chori qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
Makromakro461@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada Grin funksiyalarining nazariy asoslari va ularning issiqlik tenglamasini yechishda qo‘llanilishi tahlil qilinadi. Chiziqli differensial operatorlar uchun Grin funksiyasining aniqlanishi, fundamental yechim tushunchasi hamda boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni yechishdagi roli ko‘rib chiqiladi. Issiqlik tenglamasi uchun Grin funksiyasi yordamida umumiy yechimni integral ko‘rinishda ifodalash usullari yoritiladi. Shuningdek, nazariy bilimlarni mustahkamlash maqsadida amaliy misollar keltirilib, ularning yechimlari bosqichma-bosqich tahlil qilinadi.

Kalit so‘zlar:

Grin funksiyasi, issiqlik tenglamasi, differensial tenglama, fundamental yechim, chegaraviy masala, boshlang‘ich shart, integral ifoda, matematik fizika, issiqlik o‘tkazuvchanlik, Dirak delta funksiyasi.

Abstract.

This article examines the theoretical foundations of Green's functions and their application to solving the heat equation. The definition of Green’s function for linear differential operators, the concept of the fundamental solution, and its role in solving initial and boundary value problems are discussed. Methods for expressing the general solution of the heat equation in integral form using Green’s functions are presented. Additionally, several practical examples are provided, and their solutions are analyzed step by step to reinforce the theoretical concepts.

Keywords:

Green's function, heat equation, differential equation, fundamental solution, boundary value problem, initial condition, integral representation, mathematical physics, heat conduction, Dirac delta function.

Аннотация.

В данной статье рассматриваются теоретические основы функций Грина и их применение при решении уравнения теплопроводности. Освещаются определение функции Грина для линейных дифференциальных операторов, понятие фундаментального решения, а также их роль в решении начальных и краевых задач. Показаны методы представления общего решения уравнения теплопроводности в интегральной форме с использованием функций Грина. Кроме того, приведены практические примеры с подробным поэтапным разбором решений.

Ключевые слова:

функция Грина, уравнение теплопроводности, дифференциальное уравнение, фундаментальное решение, краевая задача, начальное условие, интегральное представление, математическая физика, теплопроводность, дельта-функция Дирака.

Kirish.

Matematik fizikaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan differensial tenglamalar ko‘plab tabiiy jarayonlarni ifodalashda asosiy vosita hisoblanadi. Xususan, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarini ifodalovchi issiqlik tenglamasi amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega. Ushbu tenglamani yechishda Grin funksiyalari samarali metodlardan biri hisoblanadi.

Grin funksiyasi usuli chiziqli differensial operatorlar uchun umumiy yechimni qurishda qo'llanilib, ayniqsa chegaraviy masalalarda muhim rol o'ynaydi.

Asosiy qism.

GRIN FUNKSIYASINING TA'RIFI

2.1 Umumiy ta'rif

L — chiziqli differensial operator bo'lsin. U holda $G(x,x')$ Grin funksiyasi quyidagi tenglamani qanoatlantiradi:

$$L\,G(x,x') = \delta(x - x')$$

Bu yerda:

- x — kuzatuv nuqtasi (field point)
- x' — manba nuqtasi (source point)
- $\delta(x - x')$ — Dirak delta-funksiyasi
- L — differensial operator (masalan, Laplasian, issiqlik operatori va h.k.)

2.2 Grin funksiyasining asosiy xossalari

1. Simmetriya xossasi (o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun):

$$G(x,x') = G(x',x)$$

2. Chegaraviy shartlarni qanoatlantirish:

Grin funksiyasi berilgan masalaning bir xil (gomogen) chegaraviy shartlarini qanoatlantiradi.

3. Yechimni topish formulasi:

$$u(x) = \int G(x,x') \cdot f(x')\,dx'$$

Bu formula Grin funksiyasining eng muhim tatbiqi bo'lib, ixtiyoriy manba f(x') uchun yechimni beradi.

Issiqlik tenglamasining umumiy ko'rinishi

Issiqlik tenglamasi (diffuziya tenglamasi) quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ **(bir o'lchamli holat)**

$\partial u/\partial t = a^2 \cdot \Delta u$ **(ko'p o'lchamli holat)**

Bu yerda:

- $u(x,t)$ — temperatura funksiyasi (joy va vaqtga bog'liq)
- $a^2 = \frac{k}{(\rho \cdot c)}$ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisienti
- k — issiqlik o'tkazuvchanlik $(\frac{W}{(mK)})$
- ρ — zichlik $(\frac{kg}{m^3})$
- c — solishtirma issiqlik sig'imi $(\frac{J}{(kg\ K)})$
- Δ — Laplasian operatori

3.2 Grin funksiyasi issiqlik tenglamasi uchun

Issiqlik tenglamasining Grin funksiyasi (bir o'lchamli cheksiz o'q uchun) quyidagi ko'rinishga ega:

$$G(x,t;x',t') = \frac{1}{\left(2a\sqrt{(\pi(t-t'))}\right)} \cdot e^{\frac{-(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}$$

Bu Gausskiy (normal taqsimot) ko'rinishdagi funksiya bo'lib, issiqlikning tarqalishini tavsiflaydi.

Eigenfunction yoyilmasi usuli

Chegarali sohada Grin funksiyasini quyidagicha yoyish mumkin:

$$G(x,x') = \Sigma_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_n \frac{x'}{\lambda_n}$$

Bu yerda φ_n — operator L ning xos vektorlari (eigenfunctions), λ_n esa mos xos qiymatlar (eigenvalues).

4.2 Laplace almashtirilmasi usuli

Vaqtga bog'liq masalalarda Laplace almashtirilmasi juda qulay:

$L\{G(x,t)\} = \tilde{G}(x,s)$ → **yechim** → **teskari Laplace**

Fizik ma’nosi

Bu formulaning ma’nosi juda muhim:

- ε nuqtada berilgan nuqtaviy issiqlik manbasi
- vaqt oʻtishi bilan issiqlik gauss taqsimoti boʻyicha tarqaladi
- maksimum markazda, asta-sekin yoyiladi

Bu diffuziya jarayonining fundamental modeli.

Umumiy yechim (boshlangʻich shart bilan)

Agar boshlangʻich temperatura:

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

boʻlsa, yechim:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\varepsilon,0)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$$

Ya’ni:

- boshlangʻich holatni har bir nuqtaviy impulsga ajratamiz
- har biri vaqt oʻtishi bilan tarqaladi
- hammasini qoʻshamiz

Chegaralangan sohada (boundary conditions)

Agar kesma $[0, L]$ da ishlasak:

- Dirixle shartlar (u=0)
- Neyman shartlar (hosila=0)

Grin funksiyasi:

- Fourier qatorlari orqali quriladi
- sinus yoki kosinus funksiyalar paydo boʻladi

Masalan (Dirixle uchun):

$$G(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi\varepsilon}{L}\right)$$

Misollar va ularning yechimlari

1-misol

Masala:

Bir oʻlchamli issiqlik tenglamasi uchun boshlangʻich shart quyidagicha berilgan:

$u(x,0) \;=\; e^{(-x^2)}$

Issiqlik tenglamasi:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

Yechish:

Grin funksiyasi formulasi:

$$G(x,t;\xi,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(4a^2t)\;\cdot\;e^{(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t})}})}$$

Umumiy yechim:

$$u(x,t) \;=\; \int [-\infty,+\infty]\, G(x,t;\xi,0) \;\cdot\; e^{(-\xi^2)}\, d\xi$$

Hisoblash natijasida:

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(4a^2t)\;\cdot\;e^{(\frac{-(x-\xi)^2}{1+4a^2t})}})}$$

Javob:

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1+4a^2t)\;\cdot\;e^{(\frac{-x^2}{1+4a^2t})}})}$$

2-misol

Masala:

Boshlangʻich shart:

$$u(x,0) \;=\; \delta(x)$$

bu yerda $\delta(x)$ — Dirak delta funksiyasi.

Issiqlik tenglamasi:

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

Yechish:

Agar boshlangʻich funksiya delta funksiya boʻlsa, yechim Grin funksiyasining oʻziga teng boʻladi:

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(4\pi a^2t)\;\cdot\;e^{(\frac{-x^2}{4a^2t})}}}$$

Bu natija nuqtaviy issiqlik manbasining vaqt boʻyicha tarqalishini ifodalaydi.

Javob:

$$u(x,t) \ = \frac{1}{\sqrt{(4\pi a^2 t)\ \cdot\ e^{(\frac{-x^2}{4a^2t})}}}$$

3-misol
Masala:
Issiqlik manbali tenglama berilgan:

$$\frac{du}{dt} \ = \ a^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \ f(x,t)$$

bu yerda

$$f(x,t) \ = \ sin(x)e^{(-t)}$$

Yechish:
Grin funksiyasi yordamida umumiy yechim:

$$u(x,t) \ = \ \int [0,t] \int [-\infty,+\infty] \ G(x,t;\xi,\tau)\ f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$f(x,t)$ ni qo‘yamiz:

$$u(x,t) \ = \ \int [0,t] \int [-\infty,+\infty] \ G(x,t;\xi,\tau)\ sin(\xi)e^{(-\tau)}d\xi d\tau$$

Bu integral issiqlik manbasi ta’sirida temperaturaning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini beradi.
Javob:
Yechim Grin funksiyasi orqali ikki karrali integral ko‘rinishda topiladi.

4-misol : Chegaralangan kesma
Masala

$$0 < x < L, u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Yechim:
Grin funksiyasi orqali:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Bu yerda:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Hisoblab:

$$b_n = \frac{4L^2}{(n\pi)^3}(1-(-1)^n)$$

5-misol: Majburiy issiqlik tenglamasi
Masala:

$$u_t - ku_{xx} = f(x,t), u(x,0) = 0$$

Yechim:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,\varepsilon,\tau) f(\varepsilon,\tau)d\varepsilon d\tau$$

Agar:

$$f(x,t) = e^{-t}\delta(x)$$

bo‘lsa:

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}} e^{\left(-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}\right)} d\tau$$

Xulosa.

Grin funksiyalari differensial tenglamalarni yechishda kuchli matematik apparat hisoblanadi. Ayniqsa, issiqlik tenglamasida ularning qo'llanilishi fizik jarayonlarni aniq modellashtirish imkonini beradi. Ushbu metod yordamida boshlang'ich va chegaraviy shartlarga ega masalalar umumiy integral ko'rinishda yechiladi. Misollar orqali ko'rish mumkinki, Grin funksiyasi yordamida murakkab masalalar ham analitik tarzda hal qilinadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Qodirov T., Xudoyberganov G. — Matematik fizika tenglamalari. Toshkent: O'qituvchi, 2010.
2. Islomov A., Jo'rayev S. — Differensial tenglamalar va ularning tadbiqlari. Toshkent: Fan, 2015.
3. Tursunov X. — Xususiy hosilali differensial tenglamalar. Toshkent: Universitet nashriyoti, 2012.
4. Rasulov A. — Matematik analiz asoslari (II qism). Toshkent: Fan va texnologiya, 2014.
5. Yo'ldoshev B. — Matematik fizika masalalari va ularni yechish usullari. Toshkent: Fan, 2018.
6. Abdukarimov M. — Issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasi asoslari. Toshkent: Innovatsiya, 2016