

FOKSNING H-FUNKSIYASI QATNASHGAN KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YECHIMLARINI TADQIQ ETISHDA ELEMENTAR XOSSALARNING O'RNI

Madrimova Yulduz Ulug'bekovna

Osiyo Xalqaro Universiteti Xorazm filiali magistri

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20340120>

Annotatsiya: Mazkur ishda kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarining analitik ko'rinishlarini tadqiq etishda Foks H-funksiyasining elementar va strukturaviy xossalariidan foydalanish samaradorligi o'rganilgan. Tadqiqot obyekti sifatida olingan funksiyalarning parametrlar juftligi to'plamidagi simmetrikligi hamda murakkablik darajasini va tartibini kamaytirish munosabatlari tahlil qilingan. Ko'rsatilgan fundamental xossalar va Gamma-funksiyaning refleksiya formulasiga asoslangan munosabatlar yordamida, kasr tartibli differensial operatorlar qatnashgan integral almashtirishlar obrazlarini sezilarli darajada soddalashtirish imkoniyatlari asoslangan. Olingan natijalar matematik fizika va nostandart jarayonlarni modellashtirishda yuzaga keladigan kasr tartibli tenglamalarning fundamental yechimlarini sifat va asimptotik jihatdan mukammal tahlil qilishga zamin yaratadi.

Kalit so'zlar: Kasr tartibli differensial tenglamalar, Foks H-funksiyasi, elementar xossalar, tartibni kamaytirish formulalari, simmetriklilik, asimptotik xulq-atvor, Gamma-funksiya.

Аннотация. В данной работе исследована эффективность применения элементарных и структурных свойств H-функции Фокса при анализе аналитических видов решений дробных дифференциальных уравнений. В качестве объекта исследования проанализированы свойства симметрии в множестве пар параметров функций, а также соотношения, уменьшающие степень сложности и порядок функции. На основе указанных фундаментальных свойств и формулы отражения Гамма-функции обоснованы возможности существенного упрощения образов интегральных преобразований с участием дифференциальных операторов дробного порядка. Полученные результаты создают основу для качественного и асимптотического анализа фундаментальных решений уравнений дробного порядка, возникающих в математической физике и моделировании нестандартных процессов.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения дробного порядка, H-функция Фокса, элементарные свойства, формулы понижения порядка, симметрия, асимптотическое поведение, Гамма-функция.

Abstract. This paper investigates the effectiveness of applying the elementary and structural properties of Fox's H-function in studying the analytical forms of solutions to fractional differential equations. As the object of research, the symmetry properties in the set of parameter pairs of the functions, as well as the relationships that reduce the degree of complexity and the order of the function, are analyzed. Based on the indicated fundamental properties and the reflection formula of the Gamma function, the possibilities of significantly simplifying the transforms of integral equations involving fractional differential operators are substantiated. The results obtained provide a solid foundation for a qualitative and asymptotic analysis of the fundamental solutions of fractional equations arising in mathematical physics and the modeling of non-standard processes.

Keywords: Fractional differential equations, Fox's H-function, elementary properties, order reduction formulas, symmetry, asymptotic behavior, Gamma function.

Kirish. Zamonaviy kasr tartibli differensial tenglashlar nazariyasi matematik fizika, mexanika va gidrodinamika kabi sohalardagi nostandart jarayonlarni modellashtirishning muhim vositasi hisoblanadi. Bunday tenglamalarning fundamental yechimlarini va integral almashtirishlarini ifodalashda Foksning H-funksiyasi markaziy o'rinni egallaydi. H-funksiya o'zining umumiy xarakteri bilan ko'plab maxsus funksiyalarni (Mettag-Leffler, Wright, G-Meijer va b.) umumlashtirganligi sababli, uning strukturaviy va elementar xossalarini to'g'ri qo'llash kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarini tahlil qilish va ularning tartibini soddalashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Asosiy qism. Mazkur ishda kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarining analitik ko'rinishlarini tadqiq etishda Foks H-funksiyasining elementar xossalaridan foydalanish samaradorligi asoslab berilgan. Avvalo, tadqiq qilinayotgan H-funksiyalar mos teoremlarga muvofiq mavjud va ma'noli deb qaraladi hamda ularning tabiati ta'rifdan bevosita kelib chiqadi [1, 51-b].

H-funksiyaning muhim xossalaridan biri uning parametrlar juftligi to'plamida, xususan, $(a_j, \alpha_j)_{1, n}$ va $(a_j, \alpha_j)_{n+1, p}$ hamda $(b_j, \beta_j)_{1, m}$ va $(b_j, \beta_j)_{m+1, q}$ tizimlarida simmetrik ekanligidir [1, 51-b]. Bu simmetriklik xossasi differensial operatorlar ta'sirida yechimlar strukturasi invariantligini ta'minlashga xizmat qiladi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarni yechish jarayonida ko'p hollarda funksiyaning murakkablik darajasini pasaytirish, ya'ni uning tartibini kamaytirish zarurati tug'iladi. Agar parametrlar tarkibidagi juftliklardan biri o'zaro teng bo'lib qolsa, H-funksiyaning tartibi mos ravishda p, q va n (yoki m) birlikka kamayadi, ya'ni funksiya pastroq tartibli ko'rinishga keladi:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_{p-1}, \alpha_{p-1}), (b_1, \beta_1) \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_{p-1}, \alpha_{p-1}) \\ (b_2, \beta_2), \dots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right]_{n \geq 1}$$

va $q \geq m+1$ bo'lganda ham analogik tarzda tartibni kamaytirish formulasi (2.1.2) o'rinli bo'ladi [1, 51-b].

Bundan tashqari, argument va uning darajalarini o'zgartirish munosabatlari, xususan:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, \alpha_p) \\ (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{q,p}^{n,m} \left[\frac{1}{z} \left| \begin{matrix} (1 - b_q, \beta_q) \\ (1 - a_p, \alpha_p) \end{matrix} \right. \right] \quad [1, 51-b]$$

hamda argument oldidagi o'zgarmas ko'paytuvchini va uning darajasini boshqaruvchi (2.1.4) va (2.1.5) munosabatlar kasr tartibli differensial tenglamalarni integral almashtirishlar (Laplas, Mellin, Furye) yordamida yechishda operatorlar obrazini sodda ko'rinishga keltirishga imkon beradi [1, 51-b].

Tezida alohida ta'kidlash joizki, Gamma-funksiyaning refleksiya formulasiga asoslangan (2.1.7) – (2.1.12) gacha bo'lgan munosabatlar H-funksiyaning argument ishorasini va uning kompleks tekislikdagi analitik davomini o'rganishda, shuningdek, kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarining asimptotik xulq-atvorini baholashda fundamental asos bo'lib xizmat qiladi [1, 52-b].

Xulosa. Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, Foks H-funksiyasining elementar xossalari va uning tartibini kamaytirish formulalari kasr tartibli differensial tenglamalarning analitik yechimlarini interpretatsiya qilishda matematik apparatni sezilarli darajada soddalashtiradi. Bu esa o'z navbatida yechimning xossalari sifat jihatidan mukammalroq tahlil qilishga zamin yaratadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J. *The H-Function: Theory and Applications*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010. – 276 p. (Xossalar va formulalar asosan kitobning **51-52-sahifalaridagi** 2.1-bo'limda keltirilgan).