$\mathbb{C}^2$ FAZONING YUQORI YARIM FAZOSIDA ODDIY VA JUFT QATLAM POTENSIAL OPERATORLARI VA ULARNING SPEKTRI

Husenova Nargis Husniddin qizi

https://doi.org/10.5281/zenodo.22040302

$D = \{z = (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 : y^2 := \operatorname{Im} z^2 > 0\}$ - $\mathbb{C}^2$ fazoning yuqori yarim fazosi, $\partial D = \{(z^1, x^2) : z^1 \in \mathbb{C}, x^2 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^3$ - uning chegarasi. $\varphi \in L^2(\partial D)$ uchun quyidagi operatorlarni koʻramiz:

- oddiy qatlam potensial operatori V, $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ dagi Laplas operatorining fundamental yechimidan hosil qilingan:

$(V\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\, |x-y|^{-2}\, dy,\ \ x \in \mathbb{R}^3;$

- juft qatlam potensial operatori (Neyman–Puankare operatori) W - V ning fundamental yadrosi normali boʻyicha olingan hosilasidan hosil qilingan, ya'ni klassik chegaraviy singulyar integral operator;

- Bochner–Martinelli chegaraviy operatori M - toʻla Bochner–Martinelli yadrosi $U(\zeta,z)$ ning ∂D ga tushirilgan chegaraviy operatori (bu operator V va W dan iborat emas, balki V ning tangensial hosilasi bilan bogʻliq qoʻshimcha hadni oʻz ichiga oladi, qarang [2]).

Teorema. D yuqoridagidek boʻlsin. U holda:

1. V operatori $\mathbb{R}^3$ dagi birinchi tartibli Ris potensialiga teng: yadrosi $|x-y|^{-2}$ boʻlib, Furye simvoli $\sigma_V(\xi) = |\xi|^{-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ (aniq konstanta bilan). Demak V - musbat, oʻz-oʻziga qoʻshma, chegaralanmagan operator boʻlib, uning spektri (uzluksiz spektr, nuqtaviy spektrsiz) $[0, +\infty)$ ga teng.
2. Yassi chegarada W operatori ayniy nolga teng: $W \equiv 0$. Bu - klassik faktning toʻgʻridan-toʻgʻri tekshirilishi: fundamental yechim radial funksiya boʻlgani uchun uning gradiyenti $(\zeta-z)$ yoʻnalishida yotadi, bu esa ∂D tekis chegarada normal yoʻnalishga har doim ortogonal boʻladi. Demak $\sigma(W) = \{0\}$.
3. Bochner–Martinelli chegaraviy operatori M quyidagi aniq koʻrinishga ega: $M = -{}^1/_2 I + {}^i/_2 R$, bunda R - $\mathbb{R}^3$ da Im z_2 yoʻnalishi boʻyicha olingan Ris almashtirishi (Riesz transform), simvoli $\sigma_R(\xi) = -i\xi_3|\xi|^{-1}$. Bu had aynan V operatorining tangensial (x_2 boʻyicha) hosilasidan kelib chiqadi - shu bois $M \equiv V$ dan W dan farqli, *ayniy nolga teng emas*.
4. M operatori chegaralangan va oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlib (chunki $-{}^1/_2 I$ va ${}^i/_2 R$ ikkalasi ham oʻz-oʻziga qoʻshma), uning spektri aniq segment koʻrinishida topiladi: $\sigma(M) = [-1, 0] \subset \mathbb{R}$, simvol $\sigma_M(\xi) = {}^1/_2(\xi_3|\xi|^{-1} - 1)$ ning $\xi \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ boʻyicha qiymatlar toʻplami sifatida. Bu - $\mathbb{C}^2$ dagi Bochner–Martinelli chegaraviy operatorining haqiqiy, oʻz-oʻziga qoʻshma va aniq hisoblanadigan spektrga ega ekanini koʻrsatuvchi asosiy natija.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. - Новосибирск: Наука, 1979.
2. Kytmanov A.M. The Bochner–Martinelli Integral and Its Applications. - Basel: Birkhäuser, 1995.
3. Stein E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
4. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. - М.: Наука, 1964.