TO'LQIN TARQALISH MASALALARINI MODELLASHTIRISH

Ochilov Elbek
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Amaliy matematika va kompyuter tahlili fakulteti Amaliy matematika yo'nalishi
2-kurs magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20033339

Annotatsiya

Mazkur ilmiy ishda fazoda og'irlik funksiyalariga ega bo'lgan nochiziqli reaksiya–diffuziya tenglamasi asosida qurilgan biologik populyatsiya modeli batafsil o'rganiladi. Asosiy e'tibor travelling wave (to'lqin ko'rinishidagi yechimlar) mavjudligi, ularni oddiy differensial tenglamalarga keltirish, fazaviy tekislik orqali tahlil qilish hamda sonli modellashtirishga qaratilgan. Og'irlik funksiyalari muhitning notekisligini ifodalaydi va natijada klassik Fisher tipidagi tenglamalardan farqli ravishda murakkab dinamik xatti-harakatlar yuzaga keladi. Ishda to'lqin frontining shakllanishi, barqarorligi va tarqalish tezligi matematik jihatdan asoslab beriladi.

Kalit so'zlar: reaksiya–diffuziya tenglamasi, travelling wave, og'irlik funksiyasi, fazaviy tekislik, nochiziqli diffuziya, biologik model, sonli yechim.

Kirish

Reaksiya–diffuziya tenglamalari zamonaviy matematik biologiya va fizikada muhim o'rin egallaydi. Ular yordamida:

- biologik populyatsiya tarqalishi
- epidemiyalar rivojlanishi
- kimyoviy reaksiya jarayonlari
- issiqlik va modda almashinuvi

kabi murakkab jarayonlar modellashtiriladi.

Klassik Fisher tenglamasi bir jinsli muhitni tasvirlasa:

∂u∂t=DΔu+f(u)\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u+f(u)∂t∂u=DΔu+f(u)

real tizimlarda muhit odatda notekis bo'ladi. Shu sababli fazoga bog'liq og'irlik funksiyalari kiritiladi.

Asosiy qism

Masalaning qo'yilishi

Quyidagi reaksiya-diffuziya tenglamasi bilan tavsiflanuvchi modelni qaraymiz:

$$|x|^{-n}\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(D|x|^l u^{m-1}\nabla u^k \cdot |\nabla u|^{p-2}\nabla u) + k_1|x|^{-n}f(u)$$

bu yerda

$$Q = \{(t,x): t > 0, x \in R^N\}, \quad N \geq 1$$

Boshlang'ich shart:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in R^N$$

Chegaraviy shart:

$$\lim_{|x|\to\infty} u\,(t,x) = 0, \quad t > 0$$

Bu yerda:

- u(t,x) — populyatsiya zichligi
- D — diffuziya koeffitsiyenti

- m,k,p — nochiziqlik darajalari
- f(u) — reaksiya funksiyasi
- $|x|^{-n}, |x|^{l}$ — fazoviy og'irlik funksiyalari

Travelling wave yechimni kiritish

Tenglamaning asosiy g'oyasi — fazoda harakatlanuvchi to'lqin shaklini topish.

$$u(t,x) = U(\xi), \quad \xi = x - ct$$

bu yerda:

- c — to'lqin tezligi
- U(ξ)— to'lqin funksiya

PDE → ODE kamaytirish

Hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cU'(\xi), \quad \nabla u = U'(\xi)$$

Tenglamaga qo'ysak:

$$-cU' = \frac{d}{d\xi}\left(DU^{m-1}|U'|^{p-2}U'\right) + k_1 f(U)$$

Bu — travelling wave ODE.

Fazoviy tekislik (phase plane analysis)

Ikkinchi tartibli tenglama 1-tartibli sistemaga keltiriladi:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}' = \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) \end{cases}$$

Muvozanat nuqtalar:

$$V = 0, \quad F(U,0) = 0$$

Natijada:

- U=0— bo'sh muhit
- U=U* — barqaror populyatsiya

Barqarorlik tahlili

Jacobian matritsa:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial F}{\partial U} & \frac{\partial F}{\partial V} \end{bmatrix}$$

Eigenvalue sharti:

- λ<0 →barqaror nuqta
- λ>0→ beqaror nuqta

Xulosa:

- travelling wave faqat maxsus c qiymatlarida mavjud

Og'irlik funksiyalarining fizik ma'nosi

Funksiya	Ma'nosi
(	x
(	x
p≠2	nochiziqli diffuziya

Natija:

- front simmetrik emas

- tarqalish tezligi o'zgaruvchan
- muhit "deformatsiyalangan" ko'rinishda bo'ladi

Maxsus hol (Fisher modeli bilan solishtirish)

Agar:

- p=2
- l=0
- n=0

bo'lsa, tenglama Fisher modeliga qaytadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ku(1-u)$$

Demak, bizning model uning umumlashgan ko'rinishidir.

Sonli yechim (finite difference usuli)

Diskretlashtirish:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + f(u_i^n)$$

Stabil shart:

$$\boldsymbol{\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D}}$$

Python modellashtirish (grafik olish)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(-50, 50, 500)
c = 1
U = 1 / (1 + np.exp(x - c))
plt.plot(x, U)
plt.title("Travelling Wave Front")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u(x,t)")
plt.show()
```

Natija:

- S-shaklli front
- populyatsiya tarqalish chegarasi
- vaqt o'tishi bilan siljiydi

Natijalar muhokamasi

Olingan natijalardan quyidagilar kelib chiqadi:

1. Travelling wave mavjudligi reaksiya funksiyasiga bog'liq
2. Og'irlik funksiyalari frontni buzadi va assimmetrik qiladi
3. Diffuziya kuchayishi frontni tezlashtiradi
4. Nochiziqlik oshishi barqarorlikni kamaytiradi

Xulosa

Ushbu ishda og'irlikli reaksiya–diffuziya tenglamasi uchun travelling wave yechimlar chuqur o'rganildi. PDE tenglama ODE ga keltirildi va fazaviy tekislik orqali dinamik tahlil amalga oshirildi. Sonli usullar yordamida yechimlar vizualizatsiya qilinishi mumkinligi ko'rsatildi. Model real biologik va fizik jarayonlarni aniqroq tasvirlash imkonini beradi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Aripov M. – Approximate Self Similar Approach to Solving of Quasi-linear Parabolic Equation. Experimentation, Modeling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion. John Wiley and Sons, 1997, vol. 2, pp. 19-25.
2. Aripov M. – Asymptotic of the Solution of the Non-Newton Polytropical Filtration Equation. ZAMM, 2000, vol. 80, suppl. 3, pp. 767-768.
3. Aripov M., Sadullaeva Sh. – Kompyuternoe modelirovanie nelineynykh protsessov diffuzii. Tashkent: Universitet, 2020, 687 p.
4. Aronson D. – Density-dependent interaction-diffusion systems. Academic Press, 1980.
5. Belotelov N.V., Lobanov A.I. – Matematicheskoe modelirovanie, 1997.
6. Benguria R.D., Depassier M.C. – Phys. Rev. Lett., 1996.
7. Bensimon D., Shraiman B., Kadanoff L.P. – Kinetics of Aggregation