

## О ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ В СРЕДЕ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Очиллов Элбек Дустмуродович

магистрант Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: [elbekochilov2001@gmail.com](mailto:elbekochilov2001@gmail.com)

тел.: +998 93 716 72 01

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20033300>

Рассмотрим в области  $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R\}$  задачу биологической популяции описываемой уравнением диффузии реакции с двойной нелинейностью с переменной плотностью и зависящим от времени коэффициентом

$$|x|^{-n} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(D|x|^l u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u) + k_1 |x|^{-n} f(u) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R, \quad (2)$$

где  $m, k, p$  заданные числовые параметры, характеризующие нелинейную среду,  $|x|^l, |x|^{-n}$  характеризуют плотность среды,  $u(t, x)$  означает плотность концентрации,  $0 \leq u_0(x) \leq 1$ . Уравнение (1) является обобщением простейшей диффузионной модели для логистического роста популяции [1-2] типа Мальтуса ( $f(u) = u$ ), типа Фёрсхюльста ( $f(u) = u(1-u)$ ) и типа Олли ( $f(u) = u(1-u^\beta), \beta > 1$ ) для случая двойной нелинейной диффузии. В случае, когда  $f(u) = u(1-u^\beta), \beta \geq 1$  уравнение (1) можно рассматривать также, как уравнение нелинейной фильтрации, теплопроводности при одновременном воздействии источника и поглощения,  $f(u) = u(1-u^\beta), \beta \geq 1$  мощности которых равны соответственно  $u$  и  $-u^{\beta+1}$

Это уравнение по форме является также лучшим сочетанием уравнения нелинейной диффузии  $(k(p-2)+m-1) > 0$ , быстрой диффузии  $(k(p-2)+m-1) < 0$ , и  $P$ -Лаплас уравнения ( $m=1$ ), уравнение пористой среды ( $p=2$ ). Случай  $k(p-2)+m-1=0$  называется критическим случаем.

Поскольку уравнение (1) в области, где  $u = 0$  является вырождающейся, то оно в области вырождения может не иметь классического решения [2]. Поэтому изучается имеющие физический смысл обобщенное решение уравнения (1), обладающее свойством:  $0 \leq u, u^{m-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \in C(Q)$  и удовлетворяющее уравнению (1) в смысле распределения [3].

Как известно для задачи (1), (2) из за вырождения уравнения характерным является наличие свойства конечной скорости распространение возмущений, т.е., существует такая непрерывная функция  $l(t)$ , что  $u(t, x) \equiv 0$  при  $|x| \geq l(t)$ . Поверхность

$|x| = l(t)$  называется свободной границей или фронтом. В случае, когда  $l(t) < \infty$  при  $t > 0$ , то решение называется пространственно локализованным.

Естественно возникает вопрос о влиянии к эволюцию процесса, описываемой задачей (1), (2) совместных действий различных кинетики. Свойства положительных решений задачи Неймана для уравнения диффузии с двойной нелинейностью при  $f(u) = u^\beta$ ,  $\beta = m + p - 2$  ( $k=1$ ) изучены в [4], а глобальная разрешимость задачи (1), (2) при  $\beta \geq 1$  в [5,6]. Конечную скорость распространения вспышки для случая модели Мальтуса путем построения точного решения установлена в [4]. В [3] для модели Фёрхальста в случае  $p=2$ .

В настоящей работе показано влияние переменной плотности к эволюцию процесса что даже в случае двойной нелинейности в диффузионной части уравнения (1) существует критическое значение параметров  $k(p-2)+m-1=0$ , при котором решение имеет характер решения линейного уравнения, что даёт возможность, применяя метод из [1] для получения оценки скорости и глубины распространения популяции (вспышки)

Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С. [1, 2]. рассмотрев волновые решения уравнения в (1) вида

$$u(t, x) = f(\xi), \quad \xi = ct \pm x$$

получили следующую оценку скорости волны

$$c \geq 2(Dk_1)^{1/2}$$

Рассмотрим решение уравнения (1) в виде

$$u(t, x) = w(t, \varphi(|x|)), \quad \varphi(|x|) = \frac{p - (n+1)}{p} |x|^{p/(p-(n+1))}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\varphi^{s-1} D w^{m-1} \left| \frac{\partial w^k}{\partial \varphi} \right|^{p-2} \frac{\partial w}{\partial \varphi}) + k_1 w(1 - w^\beta)$$

$$|x(t)| \geq p k_1^{(p-1)/p} D^{1/p} t [1 + (\ln 2) / k] t^{-1}]^{(p-1)/p}$$

$$c = \frac{dx}{dt} \geq p k_1^{(p-1)/p} D$$

из которого при  $p=2$  вытекает известные ранее результаты [1, 2].

Установлено инвариантное свойство решение уравнение (1), получены оценки решений задачи (1)-(2) и свободной границы сверху и снизу.

На основе полученных выше результатов были проведены численные эксперименты. Приведенные результаты обобщены для многомерного случая задачи (1), (2). Показано, при выполнении определенного условия, область распространения вспышки локализована.

**Adabiyotlar, References, Литературы:**

1. Марри Дж. Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. М., Мир, 1983, 397 стр.
2. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. Математика и механика, т. 1, 1-25
3. Белотелов Н. В., Лобанов А. И. Популяционные модели с нелинейной диффузии. Математическое моделирование 1997, т.9, №12, 43-55
4. Арипов Садуллаева Ш. Компьютерное моделирование нелинейных процессов диффузии. Ташкент, Университет, 2020, 687 ст.