ANIQ İNTEGRALLARDI JUWIQ ESAPLAWDIŃ TRAPECİYA HÀM SİMPSON USILI.

1Daurxanov Jeńisbay Tórexan ulı, 2Asqarov M.
[1]Ajiniyaz atındaģı NMPI "Anıq hám tábiyiy pánlerdi oqıtıw metodikası" (matematika) 2-kurs magistrantı,
[2]ilimiy basshı: Ajiniyaz atındaģı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası docenti.
https://doi.org/10.5281/zenodo.7543560

Anıq integraldı esaplawda integral astındaģı funkciyasınıń baslanģısh funkciyasın tabıw kerek boladı,biraq hàmme waqıt baslanģısh funkciyasın tawıp bolmaydı.Sonıń ushın bunday anıq integraldıń mànislerin juwıq esaplaw usılları jàrdeminde esaplanadı.

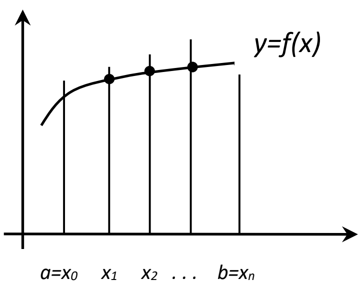
1.Trapeciya usılı.

Bul usilda $[a;b]$ intervaldı $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ noqatlar menen n dana teń bólekke bólemiz. Hár bir bólek noqatlar arasındaģı aralıq $h = \frac{a-b}{n}$ $[a;b]$ intervaldı bóliwshi noqatlardan shegaralıq iymek sızıq benen kesiliskenshi perpendyukliyar ótkizemiz.Iymek sızıq saykes noqatları ordinataların

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(x_n)$$

perpendyukliyarlarınıń $y = f(x)$ sızıq benen kesilisken qońsı noqatları xordaları menen tutastıramız hám payda etilgen hár bir tuwrı sızıqlı trapeciyalardıń maydanın tabamız:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; \quad \cdots \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$



Barlıq n dana trapeciya maydanın qosamız.

$$S = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2}\right]$$

Demek, iymek sızıqlı trapetciyanıń juwıq maydanı tómendegige teń.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

yamasa $y_0 = f(a),\ y_n = f(b),\ x_i = a = ih$ dep alsaq, trapeciya usılınıń formulası

$$S=\int_a^b f(x)dx=h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\right]$$

boladı.

Anıq integrallardı juwıq esaplawdıń barlıq usıllarında n bólekler sanın arttırsaq qatelikti sonsha kemeytiw múmkin, sebebi bólekleniw nátiyjesinde payda bolǵan maydan qanshelli kishi bolsa, formula arqalı tawılıp atırǵan figuranıń maydanı iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanına sonshelli jaqın boladı.

Esaplaw anıqlıǵı ε tiykarınan h aralıq tómendegi teńsizlik arqalı tabıladı.

$$R_n(f)=\frac{b-a}{12}f''(\xi)h^2 \quad , \ \xi\in[a;b] \quad |R_n(f)|<\varepsilon$$

Bul jerde $f''(\xi)$ funkciya $x\in[a;b]$ aralıqtaǵı $f''(x)$ tiń absolyut tarepten eń úlken manisi.

Mısalı : $S=\int_{0.25}^{1}\sqrt{x}dx$ integraldı 0.1 anıqlıqta esaplaw talap etilsin.

Sheshiliwi: $F(x)=\sqrt{x}$ integral astı funkciyası ushın [0.25;1] intervalda tómendegishe esaplaymız :

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{2}{3}},\ |f''(x)|<2\ ,\ a=0.25\ ,\ b=1\ ,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{0.75}{n}$$

$$|f''(a)|=\max|f''(\xi)|=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.25^3}}=0.25\cdot\frac{1}{0.5^3}=2$$

$$|R_n(f)|<\frac{0.75}{12}\cdot 2\left(\frac{0.75}{n}\right)^2 \quad = \quad \frac{0.03515625}{n^2}$$

Demek, **n=2** qabıl qılıw múmkin. Bul jaǵdayda $h=\frac{0.75}{2}=0.375$.

Tómendegilerdi esaplaymız:

$$x_0=a=0.25\ ;\ x_1=x_0+h=0.25+0.375=0.625\ ;\ x_2=x_1+h=0.625+0.375=1$$
$$y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{0.25}=0.5\ ;\ y_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{0.625}=0.7906\ ;\ y_2=\sqrt{x_2}=\sqrt{1}=1$$

Tabılǵan mánislerden paydalanıp berilgen integraldı esaplaymız:

$$S=\int_{0.25}^{1}\sqrt{x}dx=h\left(\frac{y_0+y_2}{2}+y_1\right)=0.375\left(\frac{0.5+1}{2}+0.7906\right)=0.577725$$

Anıq sheshimi:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1^3} - \sqrt{0.25^3}) = 0.5833$$

Esaplawda qatelikti tekseremiz:

$$\Delta = |0.5833 - 0.5777| = 0.0054 \ ;$$

2.Simpson usılı.

$[a;b]$ interval uzınlığın $h = \frac{a-b}{2n}$ bolǵan $2n$ dana jup bólekke $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}$ noqatlar arqalı ajıratamız.

$[x_0 \ ; x_2], \ [x_2 \ ; x_4], \ \ldots , \ [x_{2n-2} \ ; x_{2n}]$ intervalları payda boladı. $x_0 = 0, \ x_{2n} = b$ boladı. Bul intervallardıń ortaları sáykes túrde $x_1, x_3, ..., x_{2n-1}$ noqatlar boladı. Bul jaǵdayda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \ldots = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

integral qosındıǵa ajıratamız.

Hár bir $[x_{2i} \ ; x_{2i-2}], \ [x_{2i} \ ; x_{2i-2}]$ $(i = 0$ den $n-1$ ge shekem) intervallardan $(x_{2i} \, ; \, y_{2i}), \ (x_{2i-1} \, ; \, y_{2i-1}), \ (x_{2i-2} \, ; \, y_{2i-2})$ noqatlar arqalı hámme waqıt parabola ótkeriw múmkin, sol menen birge bunday parabola $[x_{2i} \, ; \, y_{2i+2}]$ intervalda tek jalǵız boladı. Járdemshi parabola menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciya maydanı juwıq berilgen iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanına teń boladı.

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} \left(Ax^2 + Bx + C \right) dx$$

Parabola ushın tiyisli hár úsh noqat ushın tómendegi teńlemeni jazamız:

$$\begin{cases} ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\ ax_{2i+1}^2 + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\ ax_{2i+2}^2 + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2} \end{cases}$$

Payda bolǵan a, b, c belgisizli úsh teńlemeler sistemasın sheship, a, b, c lardıń mánislerin integral ańlatpaǵa qoyıp, esaplaymız. Hár bir kesindiler ushın olardıń mánislerin qosıp,parabolalar usılına saykes formulanı payda etemiz.

$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+2ih)\right];$$

bul jerde $h=\frac{(b-a)}{2n}$

Esaplaw anıqlığı ε tiykarınan h aralıq tómendegi teńsizlik arqalı tabıladı.

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{180}f^{(iv)}(\xi)h^4 \quad , \ \xi\in[a;b] \quad |R_n(f)|<\varepsilon$$

Bul jerde $f^{"}(\xi)$ funkciya $x\in[a;b]$ aralıqtaǵı $f^{"}(x)$ tiń absolyut tarepten eń úlken manisi.

Mısalı : $S=\int_{0.25}^{1}\sqrt{x}dx$ integraldı 0.1 anıqlıqta esaplaw talap etilsin.

Sheshiliwi: $F(x)=\sqrt{x}$ integral astı funkciyası ushın [0;0.25] intervalda tómendegishe esaplaymız :

$$f^{"}(x)=-\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{2}{3}}, \ |f^{"}(x)|<2 \ , \ a=0.25 \ , \ b=1 \ , \ h=\frac{b-a}{n}=\frac{0.75}{n}$$

$$|f^{"}(a)|=\max|f^{"}(\xi)|=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.25^3}}=0.25\cdot\frac{1}{0.5^3}=2$$

$$|R_n(f)|<\frac{0.75}{180}\cdot 2(\frac{0.75}{n})^4 \quad = \frac{0.002636718 75}{n^4}$$

Demek, **n=4** qabıl qılıw múmkin. Bul jaǵdayda $h=\frac{0.75}{2}=0.375$.

Tómendegilerdi esaplaymız:

$$x_0=a=0.25 \ ; \ x_1=x_0+h=0.25+0.375=0.625; \ x_2=x_1+h=0.625+0.375=1$$
$$y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{0.25}=0.5 \ ; \ y_1=\sqrt{x_1}=\sqrt{0.625}=0.7906 \ ; \ y_2=\sqrt{x_2}=\sqrt{1}=1$$

Tabılǵan mánislerden paydalanıp berilgen integraldı esaplaymız:

$$S=\int_{0.25}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{h}{3}(y_0+y_2+4y_1)=\frac{0.375}{3}(0.5+1+4\cdot 0.7906)=0.5828$$

Anıq sheshim:

$$S = \int_{0.25}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1^3} - \sqrt{0.25^3}) = 0.5833$$

Esaplaw qáteligin tekseremiz:

$$\Delta = |0.5833 - 0.5828| = 0.0005 \ ;$$

Ádebiyatlar:

1. Isroilov M. “Hisoblash metodlari”, T., “Ózbekiston”, 2003.
2. Shoxamidov SH. “Amaliy matematika unsurlari”, T.,“Ózbekiston”, 1997.
3. Boyzaqov A., Qayumov SH “Hisoblash matematikasi asoslari”, Óquv qóllanma.Toshkent 2000.