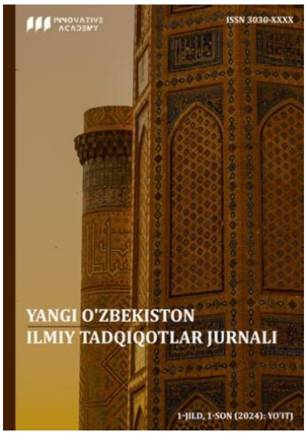


ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ИХ СВЯЗЬ СО СВОЙСТВАМИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

С.Хакимов

кандидат физико –математических наук, доцент.

АГТИ кафедра “ Технологические машины и приспособления”

https://doi.org/10.5281/zenodo.20535679

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 11-may 2026 yil
Ma’qullandi: 15-may 2026 yil
Nashr qilindi: 31-may 2026 yil

KEY WORDS

Показательные уравнения, модель, функция, свойства, задача, формула

ABSTRACT

Данная работа посвящена решению показательных уравнений и применению свойств показательных функций в их решениях

В данной работе мы хотим показать решение нескольких задач математическая модель которых является показательным уравнением. Уравнения, в которых переменные находятся только в показателях степени относятся к показательным (степенным) уравнениям. Уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a>0, a≠1 называются показательными уравнениями.

Для решения такого вида уравнений учащимся необходимо знать и уметь применять теорему о равносильности.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$ и $a \neq 0$) является равносильным уравнению $f(x) = g(x)$.

Для изучения данной темы необходимо знать основные формулы

действий со степенями, а именно: $a > 0, b > 0$: $a^0 = 1, 1^x = 1;$

$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}, (k \in Z, n \in N)$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^x a^y = a^{x+y}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$;

$a^x b^x = (ab)^x$; $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$.

Понятие показательного уравнения тесно связано с показательной функцией. В некоторых учебных пособиях, прежде чем приступить к изучению показательных уравнений и неравенств, учащимся предлагается усвоить показательную функцию. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 0$ является показательной функцией. Ключевые свойства показательной функции $y = a^x$ представлены в таблице 3.

Таблица 3 *Основные свойства показательной функции*

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$

Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Монотонность	Возрастает	Убывает

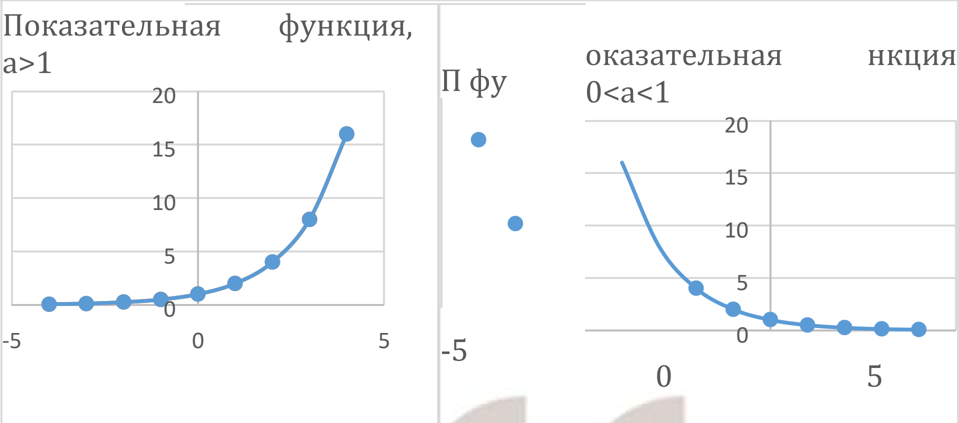


Рис. 1. График показательной функции.

График показательной функции представляет из себя экспоненту

(рис.1).

При решении показательных уравнений и неравенств часто приходится прибегать к анализу свойств показательной функции. Целесообразно привести несколько примеров решения показательных уравнений.

Задача 1.1. $2^{2\cdot x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$. При решении данной задачи

потребуется использовать свойства степеней и показательной функции, метод замены переменной: $t = 2^x$. Уравнение можно переписать следующим образом: $2 \cdot t^2 - 5 \cdot t - 88 = 0$. $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) =$
$= 729 = 27^2 > 0$. Поэтому можно сделать вывод, что уравнение имеет

два корня: $t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2\cdot 2} = 8$, $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2\cdot 2} = -5{,}5$.

Сделаем обратную замену: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = -5{,}5. \end{array}\right.$ Решим первое уравнение: $2^x = 8 \Leftrightarrow$
$2^x = 2^3$. Учитывая утверждение теоремы 1, можно осуществить переход к эквивалентному уравнению $x = 3$. Здесь потребуется знание свойств показательной функции: показательная функция является строго положительной на всей области определения, поэтому можно сделать вывод, что второе уравнение не имеет решений. Корень $x = 3$ и является решением исходного уравнения.

Задача 1.2. $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$. На первом этапе необходимо

проанализировать ОДЗ. Для анализа используем свойства показательной функции. В данном случае никаких ограничений на ОДЗ не накладывается, так как показательная функция $y = 9^{4-x}$ положительна и не равна нулю.

Применим равносильные преобразования: $3^{x-1} - 3^{x-3} = \sqrt{3^{2\cdot x-8}} + 207 \Leftrightarrow$

$3^{x-1}-3^{x-3}-3^{x-4}=207 \Leftrightarrow 3^x\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}\right)=207 \Leftrightarrow 3^x\cdot\frac{23}{81}=207 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x=3^6 \Leftrightarrow x=6.$

Задача 2.3. $\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Так как показательная функция положительна при любом значении x, то можем применить равносильное преобразование, разделив обе части на $0,2^x$. После преобразования решение уравнения

становится очевидным: $\left(\frac{5}{4}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Задача 2.4. $3^x\cdot 7^{x+2}=49\cdot 4^x$. Воспользуемся правилами умножения и деления степеней, разделим обе части на 4^x: $49\cdot 3^x\cdot 7^x=49\cdot 4^x \Leftrightarrow 21^x=$

$4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0.$

Задача 2.5. $3^x=-x-\frac{2}{3}$. Проанализировав функции, можно сделать вывод, что графики функций $y=3^x$ и $y=-x-\frac{2}{3}$ имеют только одну точку пересечения, так как $y=-x-\frac{2}{3}$- убывающая функция, а $y=3^x$-

возрастающая функция. В данном случае очевидно, что точкой пересечения графиков будет $x=-1$. Другие корни у данного уравнения отсутствуют.

Задача 2.6. $18^x-8\cdot 6^x-9\cdot 2^x=0$. Воспользуемся правилами вычисления произведения и частного степеней, преобразование будет равносильным, так как показательная функция строго положительна.

$2^x\cdot 3^{2\cdot x}-8\cdot 2^x\cdot 3^x-9\cdot 2^x=0 \Leftrightarrow 2^x\cdot(3^{2\cdot x}-8\cdot 3^x-9)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=0\\ 3^{2\cdot x}-8\cdot 3^x-9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=9\\ 3^x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$.

Примеры решения показательных уравнений мы рассмотрели. Теперь можно перейти к рассмотрению показательных неравенств. По аналогии с уравнениями, будем использовать свойства показательной функции. Дадим определение показательным неравенствам.

Неравенство называется показательным, если переменная находится только в показателе степени. Простейшее показательное неравенство имеет вид: $\mathrm{a}^{\mathrm{x}}<\mathrm{b}$ или $\mathrm{a}^{\mathrm{x}}>\mathrm{b}$, где a>0, $\mathrm{a}\neq 1$, *x*-неизвестное.

Рассмотрим теорему о равносильности неравенств.

Теорема 2. При $a>1$ неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x)>g(x)$. При $0<a<1$ показательное неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ является равносильным неравенству $f(x)<g(x)$.

Следует проиллюстрировать вышесказанное о неравенствах рядом примеров.

Задача 2.7. Решить неравенство $16^x-2\cdot 12^x\leq 3^{2\cdot x+1}$. Представим неравенство в другом виде $4^{2\cdot x}-2\cdot 4^x\cdot 3^x-3\cdot 3^{2\cdot x}\leq 0$. Проанализируем

функцию $y = 3^{2\cdot x}$, она всегда положительна, следовательно, после деления обоих частей на $3^{2\cdot x}$ изменения знака не произойдет. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2\cdot x} - 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{x} -$
$-3 \leq 0$. Выполняется подстановка: $t = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$. Следовательно, неравенство может быть записано в виде: $t^2 - 2\cdot t - 3 \leq 0$. Графическое решение последнего неравенства представлено на рисунке 2.

Рис. 2. Графическое решение неравенства.

В итоге решением неравенства является интервал: ,
Выполнив обратную подстановку, можно перейти к:
( ) .

$-1 \leq t \leq 3$

Так как показательная функция всегда положительна, левое неравенство можно считать автоматически выполненным. Сделаем равносильное преобразование, воспользовавшись свойством логарифма: $\left(\frac{4}{3}\right)^{x} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{log_{\frac{4}{3}}3}$.

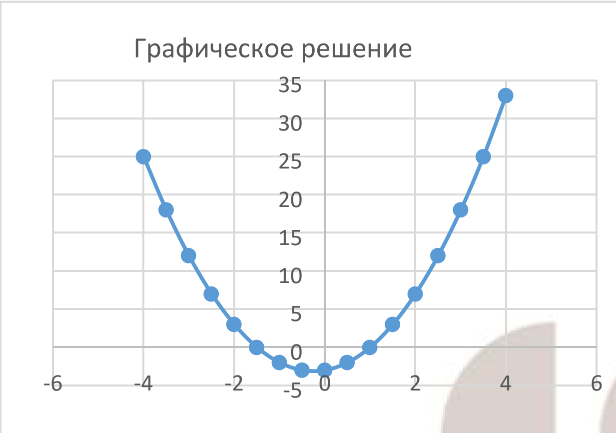
Воспользуемся рассмотренной теоремой 2 перейдем к следующему неравенству: $x \leq log_{\frac{4}{3}} 3$. Ответ: $x \in -\infty; log_{\frac{4}{3}} 3$.

Задача 2.8. $\frac{7^x-30}{7^{x-1}+1} \leq -14$. Воспользуемся свойствами степеней: $\frac{7^x-30}{\frac{1}{7}\cdot 7^x+1} \leq -14$. Сделаем замену: $t = 7^x$. Неравенство примет вид: $\frac{t-30}{\frac{1}{7}\cdot t+1} + 14 \leq$
≤ 0. Умножим числитель и знаменатель на 7: $\frac{7\cdot t-210}{t+7} + 14 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{21\cdot t-112}{t+7} \leq$
$\leq 0 \Leftrightarrow \frac{3\cdot t-16}{t+7} \leq 0$. Неравенству удовлетворяют следующие значения переменной t: $-7 \leq t \leq \frac{16}{3}$. Выполним обратную замену и получим неравенство: $-7 \leq 7^x \leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow 7^x \leq 7^{log_7\frac{16}{3}}$. По теореме 2 получим следующее неравенство: $x \leq log_7\frac{16}{3}$. Ответ: $x \in -\infty; log_7\frac{16}{3}$.

Задача 2.9. $2^{2\cdot x^2-6\cdot x+3} + 6^{x^2-3\cdot x+1} - 3^{2\cdot x^2-6\cdot x+3} \geq 0$. Выполним преобразования: $2\cdot 2^{2\cdot x^2-6\cdot x+2} + 2^{x^2-3\cdot x+1}\cdot 3^{x^2-3\cdot x+1} - 3\cdot 3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2} \geq 0$.

Так как $3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2}$ является положительным, можем разделить обе части уравнения на $3^{2\cdot x^2-6\cdot x+2}$, не меняя знак неравенства. Получается:

$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot x^2-6\cdot x+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}-3\geq 0$. Далее следует выполнить замену переменной: $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}$. Тогда исходное неравенство можно записать в виде: $2\cdot t^2+t-3\geq 0$. Графическое решение данного неравенства представлено на рисунке 3. Значения t, пр



$t\in -\infty; -\frac{3}{2}\cup 1;+\infty)$. После обратной замены получим два неравенства.

Рис. 3. Графическое решение неравенства.

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}\leq -\frac{3}{2},\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}\geq 1\end{array}\right.$$

Так как показательная функция положительна, первое неравенство не имеет решений.

Рис. 4. Графическое решение неравенства

Рассмотрим второе неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3\cdot x+1}\geq 1\Leftrightarrow$

Так как $0<\frac{2}{3}<1$, то по теореме 2, перейдем к следующему неравенству: $x^2--3\cdot x+1\leq 0$. Графическое решение данного неравенства приведено на рисунке 4. Таким образом, решением исходного неравенства будет являться интервал: $x\in\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Задача 2.10. $2 \cdot x + 2 - x^2 \geq 3^{x^2-2\cdot x+2}$. Рассмотрим левую часть уравнения: функция $y = 2 \cdot x + 2 - x^2$- это парабола, вершиной является точка с координатами: $x_t = -\frac{b}{2\cdot a} = 1,\ y_t = 3$. Ветви направлены вниз, данная

точка является высшей точкой. Рассмотрим функцию в показателе степени в правой части неравенства: $y = x^2 - 2 \cdot x + 2$. Вершиной является точка с координатами: $x_t = -\frac{b}{2\cdot a} = 1,\ y_t = 1$. Ветви направлены вверх, данная точка является низшей точкой. Наименьшее значение функции $y = 3^{x^2-2\cdot x+2}$ равно $3^1 = 3$, аналогично функции параболы, находящееся в показателе степени.

Ограниченной снизу является и функция $y = 3^{x^2-2\cdot x+2}$, которая стоит в правой части неравенства. Ее наименьшее значение достигается в той же точке, что и у параболы, располагающейся в показателе степени, и это значение равно $3^1 = 3$. Следовательно, исходное неравенство может быть верным только в случае, в котором значение функций, находящихся слева и справа совпадают, и эти значения равны 3 (поскольку только это число является пересечением областей значений данных функций). Легко проверить, что данное условие справедливо в единственной точке $x = 1$.
Таким образом, именно $x = 1$ и является решением исходного неравенства.

Итак, уравнения и неравенства называются показательными, если переменная находится только в показателе степени. Понятие показательного уравнения тесно связано с показательной функцией. Для решения данного вида уравнений и неравенств используются свойства показательной функции, теоремы о равносильности.

Список использованной литературы:

1. Алихонов С. Математика ўқитиш методикаси. Тошкент «Ўқитувчи» 2008 год.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / Мордкович А.Г., Семенов П.В. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с.
3. Афоничева, Ю.А., Некоторые аспекты изучения показательных уравнений и неравенств в средней школе
4. Бакирова Н.Ю., Сайдалиева Ф.Х. “Методика преподавания математики “ учебное пособие, - Ташкент 2008.
5. Мухамедова Г.Р. , Тохиров Ж. Математика фанини касбий сохаларга йуналтириб укитиш методикаси Методик кулланма,ТДПУ 2012.