

TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR QATNASHGAN IFODALARNI AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLAR

Rashidova Lobar Zohid qizi

Kattaqo'rg'on davlat pedagogika instituti

Matematika va informatika yo'nalishi talabasi

lobarrashidova1106@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21357154>

Annotatsiya. Trigonometriya kursining eng muhim bo'limlaridan biri bo'lgan ayniy shakl almashtirishlar ko'pincha o'quvchilarda qiyinchilik tug'diradi. Mazkur maqolada trigonometrik ifodalarni ayniy shakl almashtirishning asosiy usullari va qoidalari tadqiq etiladi. Asosiy trigonometrik ayniyatlar yordamida murakkab ifodalarni soddalashtirish, isbotlash va hisoblash jarayonlari tahlil qilingan. Maqola davomida turli darajadagi misollar orqali formulalarni amaliyotda qo'llashning samarali yo'llari ko'rsatib o'tilgan.

Kalit so'zlar: Trigonometrik funksiyalar, ayniy shakl almashtirishlar, asosiy trigonometrik ayniyatlar, ifodalarni soddalashtirish.

Annotation. Trigonometric identities, one of the most important sections of the trigonometry course, often cause difficulties for students. In this article, the main methods and rules for replacing trigonometric expressions with the same form are studied. With the help of basic trigonometric identities, the processes of simplification, proof and computation of complex expressions have been analyzed. Throughout the article, effective ways to apply formulas in practice are demonstrated through examples at various levels.

Keywords: Trigonometric functions, trigonometric identities, basic trigonometric identities, simplifying expressions.

Аннотация. Идентичные преобразования, один из важнейших разделов курса тригонометрии, часто вызывают трудности у учащихся. В статье рассматриваются основные методы и правила тождественных преобразований тригонометрических выражений. Проанализированы процессы упрощения, доказательства и вычисления сложных выражений с использованием основных тригонометрических тождеств. На протяжении всей статьи демонстрируются эффективные способы применения формул на практике с помощью примеров разного уровня.

Ключевые слова: Тригонометрические функции, тождественные преобразования, основные тригонометрические тождества, упрощение выражений.

Kirish.

O'quvchilarning trigonometrik ifodalarni ayniy shakl almashtirish ko'nikmalarini rivojlantirish murakkab kognitiv jarayon bo'lib, u bevosita ikki bosqichli tayyorgarlikka tayanadi. Birinchi navbatda, o'quvchi trigonometrik funksiyalar ta'rifi, ularning choraklar bo'yicha ishoralari va asosiy ayniyatlar tizimini nafaqat yod bilishi, balki ularning mantiqiy kelib chiqishini ham anglab etishi zarur. Ikkinchi muhim jihat — berilgan ifodaning strukturaviy tuzilishiga qarab, unga eng mos keluvchi formulani tanlay olish va strategik algoritmlarni qo'llash malakasidir. Matematika darslarida trigonometrik amallarni og'zaki bajarish metodikasini joriy etish, o'quvchilarda matematik instinkt va mantiqiy tafakkur zanjirini mustahkamlaydi. O'qituvchi tomonidan darsning kirish qismida qo'llaniladigan “tezkor soddalashtirish” mashqlari o'quvchi

xotirasida formulalarning uzoq muddatli saqlanishini ta'minlaydi. Bu kabi interaktiv usullar nazariy bilimlarni amaliy ko'nikmalarga aylantirishda va murakkab trigonometrik muammolarni yechishda poydevor vazifasini o'taydi.

Asosiy qism.

Yuqorida ta'kidlangan metodik yondashuvlarni amaliyotda qo'llash uchun, dastlab trigonometrik ifodalarni shakl almashtirishda ishlatiladigan fundamental ayniyatlar va ularni tizimlashtirish masalasiga to'xtalib o'tamiz.

Ayniyat — tarkibidagi harflarning (o'zgaruvchilarning) barcha yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan qiymatlarida o'rinli bo'lgan tenglikka aytiladi. Trigonometrik ayniyat esa burchakning (masalan, α) funksiya aniqlanish sohasiga tegishli barcha qiymatlarida to'g'ri bo'ladigan trigonometrik ifodalar orasidagi bog'liqlikdir. Trigonometrik ayniyatlar matematikaning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, ular argumentning (burchakning) qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida to'g'ri bo'ladigan tengliklardir.

Algebraik ifodaning miqdoriy qiymatini o'zgarimasdan bir shakldan ikkinchi bir shaklga o'zgartirib yozish **ayniy almashtirish** deyiladi.

Trigonometrik ayniyatlar bir funksiyani ikkinchisi orqali ifodalashga va murakkab ifodalarni soddalashtirishga xizmat qiladi. Ularning eng asosiylari quyidagilardir:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 2) \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad 4) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$5) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 6) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

1-misol. Ayniyatni isbotlang: $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$

Yechish: Bu ayniyatni Chap qismni soddalashtirib, o'ng qismga keltirish usuli bilan isbotlaymiz. Buning uchun kasrlarni umumiy maxrajga keltirib qo'shamiz.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin \alpha \cdot \sin \alpha + (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) + (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha) + (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)} = \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Bu misolda quyidagicha almashtirishlar olindi:

$$\sin \alpha \cdot \sin \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Keyin esa oxirgi ifodani $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ formulaga qo'yib ochildi hamda umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish orqali berilgan ifoda soddalashtirilib ayniyat isbotlandi.

Asosiy trigonometrik ayniyatlar keltirilgach o'qituvchi murakkabroq ifodalarni ayniy shakl almashtirish orqali soddalashtirishni tushuntirib berishi maqsadga muvofiqdir.

Trigonometrik ifodalarni soddalashtirish — bu murakkab ko'rinishdagi ifodani asosiy formulalar yordamida ixchamroq ko'rinishga keltirish jarayonidir. Bu jarayonni samarali bajarish

uchun ma'lum bir tizimli yondashuvga amal qilish tavsiya etiladi. Quyida trigonometrik ifodalarni soddalashtirishning asosiy bosqichlari va strategiyalari keltirilgan:

1-bosqich: Asosiy formulalarni tayyorlab olish

Soddalashtirishni boshlashdan avval 'shish formulalari, ikkilangan burchak formulalari, darajani pasaytirish formulalari, yig'indini ko'paytmaga o'tkazish, ko'paytmani yig'indiga o'tkazish va keltirish formulalari kabi asosiy formulalar hamda trigonometriyaning asosiy formulalarini yodda tutish lozim.

2-bosqich: Barcha funksiyalarni $\sin \alpha$ va $\cos \alpha$ ga o'tkazish.

Bu ko'pincha eng samarali usul hisoblanadi. Boshqa trigonometrik funksiyalar ifdada qatnashsa ularning hammasini $\sin \alpha$ va $\cos \alpha$ ga o'tkazish kerak.

3-bosqich: Algebrik amallarni bajarish

Trigonometriya bu yerda algebra bilan birlashadi. Quyidagi amallarni bajariladi:

- Umumiy mahraj berish: Agar ifoda bir nechta kasrdan iborat bo'lsa umumiy mahrajga keltirish kerak.
- Qisqa ko'paytirish formulalarini qo'llash: Masalan, Ko'pgina ifodalarni soddalashtirish jarayonida qisqa ko'paytirish formulalari ko'rinishidagi ifodalarni yig'ish yoki yoyish kerak bo'ladi.
- Qavsdan tashqariga chiqarish: Umumiy ko'paytuvchilarni aniqlash va qavdan tashqariga olib chiqish lozim.

4-bosqich: Trigonometrik ayniyatlarni qo'llash

Ifoda soddalashtirish sari unda asosiy trigonometrik funksiyalar paydo bo'ladi.

- Har doim ifodaning eng chalkash ko'ringan qismini (odatda chap tomon yoki surat) birinchi bo'lib soddalashtirishga harakat qilish kerak.
- Darajani pasaytirish: Agar ifodada $\sin^2 \alpha$ yoki $\cos^2 \alpha$ bo'lsa-yu, lekin ular ayniyatga kelmasa, darajani pasaytirish formulalaridan foydalaning.
- Agar burchaklar turlicha bo'lsa (masalan, α va 2α), birinchi navbatda ularni bir xil burchakka keltirib oling.

Ushbu bosqichlar ketma-ketligi har qanday murakkablikdagi trigonometrik misollarni mantiqiy yakuniga yetkazishga yordam beradi.

2-misol. $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) - \cos^2 \alpha$ ifodani soddalashtiring.

1-usul.

$$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 1 + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0$$

2-usul.

$$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 1 = 0$$

3-misol. $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha$ ifodani ayniy shakl almashtirishlar yordamida ko'paytma shakliga keltiring.

$$\sqrt{3} - 2 \sin \alpha = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \sin \alpha \right) = 2 (\sin 60^\circ - \sin \alpha) = 4 \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$$

4-misol. $\frac{1 + \operatorname{tg}(-60^\circ)}{\sin 60^\circ + \sin(-30^\circ)}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}(-60^\circ)}{\sin 60^\circ + \sin(-30^\circ)} = \frac{1 - \operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = -2$$

5-misol. $\frac{2 - \sin(-45^\circ) \cos(45^\circ)}{\operatorname{tg}(-45^\circ) \operatorname{ctg} 45^\circ}$ ushbu ifodani soddalashtiring.

$$\frac{2 - \sin(-45^\circ) \cdot \cos(45^\circ)}{\operatorname{tg}(-45^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{2 + \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ)}{-\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = -\left(2 + \frac{1}{2}\right) = -2,5$$

6-misol. Ifodani soddalashtiring: $\frac{[\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)]^2}{1 - 2 \sin(-\alpha) \cdot \cos(-\alpha)}$

$$\frac{[\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)]^2}{1 - 2 \sin(-\alpha) \cdot \cos(-\alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 1$$

7-misol. $\frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}$ soddalashtiring.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} &= \frac{(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} \\ &= \frac{(\sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin^2 \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{(\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta) - (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} \\ &= \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta} = \sin \alpha - \sin \beta \end{aligned}$$

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Alixanov.S “Matematika o‘qitish metodikasi” Toshent “O‘qituvchi”-2008
2. Demidov.V.P, Saransev.G.I “Metodika prepodavaniya matematiki” Moskva “Prosveshenie”-1978
3. Sirojiddinov.S.X, Mirzaahmedov.M.A “Matematika kasbi haqida suhbatlar” Toshent “O‘qituvchi”-1993