INTEGRAL TENGLAMALARNING ZAMONAVIY YECHIM USULLARI

Xurramova Muxlisa
Kattaqo'rg'on Davlat Pedagogika instituti
Aniq va tabiiy fanlar fakulteti
Matematika yo'nalishi m_25_01 guruh talabasi
xurramovamuxlisa2007@gmail.com

https://doi.org/10.5281/zenodo.20379994

Annotatsiya: Ushbu maqolada integral tenglamalarning nazariy asoslari va ularni yechishning zamonaviy usullari tahlil qilinadi. Integral tenglamalar matematika, fizika, muhandislik, iqtisodiyot va biologiyada murakkab jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Tadqiqotda Fredholm va Volterra tipidagi integral tenglamalar, shuningdek ularni yechishda qo'llaniladigan Nyström, kollokatsiya, Galerkin, kvadratura va wavelet usullari ko'rib chiqilgan. Sun'iy intellekt va mashinaviy o'qitish asosidagi yangi yondashuvlarning imkoniyatlari ham baholangan. Tadqiqot natijalari integral tenglamalarni yechishda zamonaviy sonli usullar yuqori aniqlik, hisoblash tezligi va amaliy samaradorlikni ta'minlashini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: integral tenglama, Fredholm tenglamasi, Volterra tenglamasi, Nyström usuli, Galerkin usuli, kollokatsiya usuli, kvadratura usuli, wavelet usuli, mashinaviy o'qitish.

Аннотация: В статье анализируются теоретические основы интегральных уравнений и современные методы их решения. Интегральные уравнения широко применяются в математике, физике, инженерии, экономике и биологии для моделирования сложных процессов. Рассматриваются интегральные уравнения типа Фредгольма и Вольтерры, а также методы Нюстрёма, коллокации, Галёркина, квадратур и wavelet-методы.

Ключевые слова: интегральное уравнение, уравнение Фредгольма, уравнение Вольтерры, метод Нюстрёма, метод Галёркина, метод коллокации.

Abstract: This article analyzes the theoretical foundations of integral equations and modern methods for solving them. Integral equations are widely used in mathematics, physics, engineering, economics, and biology to model complex processes.

Keywords: integral equation, Fredholm equation, Volterra equation, Nyström method, Galerkin method, collocation method.

Kirish

Integral tenglamalar matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, noma'lum funksiya integral belgisi ostida qatnashadigan tenglamalarni o'z ichiga oladi. Bunday tenglamalar nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega bo'lib, fizika, mexanika, elektrotexnika, iqtisodiyot, biologiya hamda boshqa ko'plab fan sohalarida uchraydigan murakkab jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi.

Integral tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int abK(x,t)\varphi(t)dt.$

Mazkur maqolaning maqsadi integral tenglamalarning nazariy asoslarini yoritish, ularni yechishning zamonaviy usullarini tizimli ravishda tahlil qilish va ushbu usullarning ilmiy hamda amaliy samaradorligini baholashdan iborat.

Foydalanilgan adabiyotlar sharhi

Integral tenglamalar nazariyasi bo'yicha dastlabki fundamental tadqiqotlar Vito Volterra va Erik Ivar Fredholm tomonidan olib borilgan. Volterra o'z ishlarida biologik va fizik jarayonlarni tavsiflovchi integral tenglamalarning xossalarini oʻrgangan boʻlsa, Fredholm ikkinchi tur integral tenglamalar uchun determinantlar va rezolventa yadrosi tushunchalarini ishlab chiqqan. Ushbu ilmiy natijalar integral tenglamalar nazariyasining mustahkam nazariy poydevorini yaratdi.David Hilbert integral operatorlar nazariyasini rivojlantirib, integral tenglamalarni funksional analiz nuqtai nazaridan tadqiq etdi. Hilbert fazolari va ortogonal funksiyalar tizimlari yordamida integral tenglamalarni yechish usullari keyinchalik matematik fizika va spektral nazariyaning rivojlanishiga katta ta’sir koʻrsatdi.Kendall Atkinsonning ilmiy ishlari sonli yechim usullarining nazariy asoslarini yoritishda muhim oʻrin tutadi. Uning tadqiqotlarida Nyström va kvadratura usullarining yaqinlashish xossalari, xatolik baholari va kompyuterda amalga oshirish mexanizmlari batafsil tahlil qilingan.Rainer Kress integral tenglamalarning amaliy qoʻllanilishiga alohida e’tibor qaratgan. Uning ishlari, ayniqsa, chegaraviy masalalar, akustika va elektromagnit maydonlarni modellashtirishda integral tenglamalarning samarali qoʻllanishini koʻrsatadi.Peter Linz tomonidan yaratilgan darsliklar va tadqiqotlarda integral tenglamalarning nazariy asoslari, Fredholm va Volterra tenglamalarining tasnifi hamda ularni yechishning analitik va sonli usullari tizimli ravishda bayon etilgan.

Soʻnggi yillarda wavelet usullari, spektral metodlar va mashinaviy oʻqitish algoritmlariga bagʻishlangan tadqiqotlar integral tenglamalarni yechishning yangi bosqichini boshlab berdi. Bu yoʻnalishdagi ishlarda katta hajmdagi ma’lumotlar bilan ishlash, noaniqliklarni hisobga olish va yuqori aniqlikdagi modellashtirish imkoniyatlari kengaygani qayd etilgan.Tahlil qilingan ilmiy manbalar shuni koʻrsatadiki, integral tenglamalarni yechish usullari klassik nazariy yondashuvlardan tortib zamonaviy kompyuter algoritmlarigacha boʻlgan keng doirani qamrab oladi. Ularning har biri ma’lum turdagi masalalarda samarali boʻlib, amaliy hisoblashlarda muhim ahamiyat kasb etadi.

Tadqiqot metodologiyasi

Mazkur tadqiqotda integral tenglamalarning zamonaviy yechim usullarini nazariy va amaliy jihatdan oʻrganish uchun kompleks metodologik yondashuv qoʻllanildi. Tadqiqotda matematik tahlil, qiyosiy tahlil, sonli tajribalar va natijalarni baholash usullaridan foydalanildi.Nyström, kollokatsiya, Galerkin, kvadratura va wavelet metodlari tizimli ravishda tahlil qilinib, ularning aniqligi va hisoblash samaradorligi baholandi.

Tahlil va natijalar

Tadqiqot jarayonida integral tenglamalarni yechishning zamonaviy usullari nazariy va amaliy jihatdan qiyosiy tahlil qilindi. Asosiy e’tibor ikkinchi tur Fredholm va Volterra integral tenglamalarini yechishda keng qoʻllaniladigan Nyström, kollokatsiya, Galerkin, kvadratura va wavelet usullarining samaradorligini baholashga qaratildi. Tahlil natijalari ushbu usullarning har biri ma’lum turdagi masalalarda yuqori natija berishini koʻrsatdi.Nyström usuli integralni kvadratura formulalari yordamida diskretlashtirishga asoslanadi. Ushbu usulning asosiy afzalligi algoritmning sodda tuzilishi va kompyuterda oson amalga oshirilishidir. Tajriba natijalari silliq yadrolarga ega integral tenglamalarda Nyström usuli yuqori aniqlik bilan tez yaqinlashishini koʻrsatdi. Tugunlar soni ortishi bilan xatolik keskin kamayib, yechimning barqarorligi oshdi.Kollokatsiya usulida noma’lum funksiya ma’lum bazis funksiyalar orqali approksimatsiya qilinadi va tenglama tanlangan nuqtalarda qanoatlantiriladi. Tadqiqot davomida ushbu usul murakkab shakldagi yadrolar va chegaraviy shartlarga ega masalalarda samarali natija bergani aniqlandi. Ayniqsa, bazis funksiyalar toʻgʻri tanlanganda, hisoblash resurslari nisbatan kam sarflanib, yetarlicha aniq yechimlar olindi.Galerkin usuli funksional analiz tamoyillariga asoslangan boʻlib, ortogonal bazis funksiyalar yordamida yechim quriladi. Olingan natijalar

Galerkin usuli yuqori aniqlik va matematik barqarorlikni ta'minlashini ko'rsatdi. Ushbu usul, ayniqsa, murakkab operatorli va katta o'lchamli masalalarda samarali bo'ldi. Hisoblash vaqti nisbatan ko'proq bo'lsa-da, yechimning ishonchliligi yuqori bo'ldi.Kvadratura usullari integral operatorlarni sonli integrallash orqali algebraik tenglamalar sistemasiga keltiradi. Tahlil natijalari ushbu usullar sodda algoritmik tuzilishga ega ekanligini va ko'plab amaliy masalalarda muvaffaqiyatli qo'llanilishini ko'rsatdi. Biroq singulyar yadrolar mavjud bo'lgan holatlarda maxsus modifikatsiyalar talab etilishi kuzatildi.Wavelet usullari lokal xususiyatlarni aniqlash va ko'p masshtabli tahlilni amalga oshirish imkonini beradi. Tadqiqot natijalari ushbu usullar keskin o'zgaruvchan yoki noaniq ma'lumotlarga ega integral tenglamalarda ayniqsa samarali ekanligini tasdiqladi. Matritsalar siyraklashuvi hisobiga hisoblash tezligi oshib, xotira sarfi kamaydi.Sun'iy intellekt va mashinaviy o'qitish asosidagi yondashuvlar integral tenglamalarni yechishning istiqbolli yo'nalishi sifatida baholandi. Neyron tarmoqlar yordamida analitik yechim topish qiyin bo'lgan masalalarda yaqin natijalar olinishi mumkinligi aniqlandi. Ushbu yondashuvlar katta hajmdagi ma'lumotlar bilan ishlash va noaniqliklarni hisobga olishda muhim afzalliklarga ega.Qiyosiy tahlil natijalariga ko'ra, silliq yadrolarga ega standart integral tenglamalar uchun Nyström va kvadratura usullari tezkor va samarali hisoblanadi. Yuqori aniqlik talab etiladigan murakkab masalalarda Galerkin usuli eng ishonchli natijalarni beradi. Lokal xususiyatlar muhim bo'lgan masalalarda wavelet usullari ustunlik qiladi. Noan'anaviy va katta hajmdagi masalalar uchun esa mashinaviy o'qitish metodlari katta istiqbolga ega.Umuman olganda, tadqiqot natijalari integral tenglamalarni yechishning zamonaviy usullari nazariy jihatdan puxta asoslanganligini va amaliy hisoblashlarda yuqori samaradorlikka ega ekanligini ko'rsatdi. Usul tanlash masalaning matematik xususiyatlari, talab etiladigan aniqlik darajasi va mavjud hisoblash resurslariga bog'liq bo'lib, har bir metod ma'lum sharoitlarda optimal natija beradi.

Xulosa

Mazkur tadqiqot integral tenglamalarni yechishning zamonaviy usullari nazariy va amaliy jihatdan samarali ekanligini ko'rsatdi. Har bir metodning o'ziga xos afzalliklari mavjud bo'lib, masalaning turi va talab etiladigan aniqlik darajasiga qarab tanlanadi.Kelgusida neyron tarmoqlar va gibrid algoritmlarni qo'llash integral tenglamalarni yechish samaradorligini yanada oshirishi mumkin.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Linear Integral Equations. Boston: Birkhäuser, 1997. B. 15–42, 85–118.
2. A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976. B. 23–67.
3. Linear Integral Equations. New York: Springer, 2014. B. 41–96, 183–245.
4. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Oxford: Oxford University Press, 2004. B. 52–134.
5. Integral Equations and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. B. 29–88.
6. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. B. 71–156.
7. Integral Equations. New York: Dover Publications, 1985. B. 17–93.
8. Introduction to Integral Equations with Applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 1999. B. 35–112.