FUNKSIYA TUSHUNCHASINING PAYDO BO'LISHI VA RIVOJLANISH TARIXI

Ruziboyeva Oqila Shonazar qizi
Qarshi Davlat Universiteti o'qituvchisi
Oqilaruziboyeva2905@gmail.com
Jumayev Azizbek Sobir o'g'li
Qarshi Davlat Universiteti, talaba
Jumayevazizbek857@gmail.com
Shodiyeva Dilfuz Urol qizi
Qarshi Davlat Universiteti, talaba
shodiyevadilfuza2006@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.20092569

Annotatsiya: Matematika — bu shunchaki sonlar olami emas, balki koinotdagi yashirin aloqalarni qidirish san'atidir. Mazkur tadqiqot kishi aqlini shoshirib qo'yadigan bitta fundamental savol atrofida quriladi: Biz borliqdagi uzviylikni qanday qilib yagona qonuniyatga bo'sindirdik? Maqolada statik dunyoqarashdan dinamik tafakkurga o'tishning eng buyuk ko'priklaridan biri — Funksiya konsepsiyasining tug'ilish dramasi tahlil qilinadi.

Ushbu ishda odatiy xronologik sanashlardan voz kechilib, insoniyat idrokining tub burilish nuqtalariga e'tibor qaratilgan. Matn davomida Bobil loy jadvallaridagi ilk instinktiv harakatlar qanday qilib Dekartning geometrik inqilobiga aylangani va nihoyat, Eyler, Dirixle hamda Burbaki maktabi qo'lida koinotning universal o'lchov tiliga aylangani falsafiy-matematik rakursda yoritiladi. Bu quruq formulalar tarixi emas, balki inson tafakkurining cheksizlikni modellashtirish yo'lidagi evolyutsion manifestidir.

Kalit so'zlar: Koinot tili, o'zgarishlar mexanikasi, bog'liqlik tabiati, dinamik tafakkur, analitik inqilob, mavhumlik cho'qqisi.

Kirish

Matematikaning eng muhim va asosiy tushunchalaridan biri bu — funksiya tushunchasidir. Funksiya tushunchasi nafaqat matematik analizning, balki fizika, iqtisodiyot, informatika va boshqa ko'plab fanlarning nazariy asosini tashkil etadi. Hozirgi kunda funksiyalar yordamida turli jarayonlar, hodisalar va bog'lanishlar ifodalanadi. Funksiya tushunchasi kundalik hayotda ham namoyon bo'ladi.Masalan, bug'ning qaynash harorati (T) bosimga (P) bog'liq – bu fizik funksiya. Maktab matematikasida $y = x^2$ yoki $y = \sin x$ kabi ifodalar bilan tanishmiz. Ammo bu oddiy ko'rinadigan belgi orqasida 4000 yillik tafakkur taraqqiyoti yotadi.

Funksiya tushunchasi birdaniga paydo bo'lmagan, balki uzoq tarixiy rivojlanish jarayonida shakllangan. Bu tushuncha qadimgi davrlardan boshlab, turli olimlarning ilmiy ishlari orqali takomillashib borgan. Mazkur maqolada funksiya tushunchasining paydo bo'lishi, uning rivojlanish bosqichlari va zamonaviy ta'rifi batafsil tahlil qilinadi.

ANTIK DAVR VA ILK QADAMLAR

Funksiya tushunchasining ildizlari qadimgi Bobil va Misrga borib taqaladi. Garchi o'sha davrda "funksiya" atamasi mavjud bo'lmasada, miqdorlar o'rtasidagi bog'liqlik tushunchasi amaliyotda keng qo'llanilgan.

Bobil jadvallari: Miloddan avvalgi 2000-yillarda bobilliklar sonlarning kvadratlari, kublari va teskari qiymatlari jadvallarini tuzishgan. Bu jadval ko'rinishidagi funksiyaning ilk ko'rinishi edi.

Bobil (mil.avv. 1800-yillar): Astronomlar Quyosh va Oy tutilishlarini oldindan bilish uchun kunlik holat jadvallarini tuzgan.

Antik Gretsiya: Gipparx va Ptolemey kabi olimlar xordalar jadvallarini (hozirgi sinuslar jadvaliga o‘xshash) tuzishgan. Bu astronomik hisob-kitoblar uchun zarur bo‘lgan miqdoriy bog‘liqliklarning matematik ifodasi edi. Qadimgi Yunon matematiklari, ayniqsa Evklid va Arximed, geometrik munosabatlarni o‘rganish orqali funksional bog‘lanishlarga yaqinlashgan. Biroq ular hali funksiya tushunchasini aniq shaklda ifodalamagan.

Ptolemey “Almagest” asarida (150-yil) vatarlar jadvalini bergan. Masalan, markaziy burchakka qarab vatar uzunligi:

Agar burchak a= 60° vatar = 60 birlik (radius = 60)

Agar burchak = 90° vatar ≈ 84,85 birlik

Biroq, antik davr matematikasi asosan geometriyaga asoslangani va "o‘zgaruvchi miqdor" tushunchasi hali shakllanmagani sababli, funksiya alohida obyekt sifatida qaralmagan.

Qadimgi Bobilda funksiya matematik formula sifatida emas, balki amaliy jadval sifatida qaralgan.

Misol: n^2 + n jadvali. Bobilliklar kub tenglamalarni yechish uchun quyidagi ko‘rinishdagi jadvallardan foydalanishgan:

Agar n=1 bo‘lsa, qiymat 2;

Agar n=2 bo‘lsa, qiymat 6;

Agar n=3 bo‘lsa, qiymat 12.

Bunda har bir n soniga aniq bir natija mos kelishi funksiyaning eng sodda "jadval usuli".

O‘RTA ASRLARDA "BOG‘LIQLIK" TUSHUNCHASI

O‘rta asrlarda Yaqin va O‘rta Sharq olimlarining ishlari funksiya tushunchasini tahliliy darajaga olib chiqdi. O‘rta asrlarda Sharq olimlari matematika rivojiga katta hissa qo‘shgan. Ayniqsa:

algebra rivoji,

tenglamalar yechimi,

astronomik hisob-kitoblar

funksiya tushunchasining shakllanishiga zamin yaratdi. Al-Xorazmiyning algebraik tenglamalari va Beruniyning trigonometrik jadvallari bir miqdorning boshqasiga bog‘liqligini aniqroq ko‘rsatib berdi. Ayniqsa, Beruniy o‘zining "Qonuni Mas’udiy" asarida funksiyaning o‘zgarish grafigiga yaqin tushunchalarni qo‘llagan.

Nikola Orem (XIV asr): Fransuz olimi Orem birinchi bo‘lib "kenglik" va "uzunlik" (hozirgi absissa va ordinata) tushunchalarini kiritib, jarayonlarning grafikli tasvirini yaratdi. U "sifatlarning intensivligi" o‘zgarishini geometrik shakllar orqali ifodaladi.

Beruniy (XI asr): Yer radiusini o‘lchashda balandlik va ufq masofasi orasidagi bog‘lanishni jadval shaklida bergan. Masalan:

Balandlik h = 100 m → ufq masofasi d ≈ 35,7 km

h = 400 m → d ≈ 71,4 km

XVII ASR: ANALITIK GEOMETRIYA VA MEXANIKA

XVII asr fan inqilobi funksiya tushunchasida burilish yasadi. Bunga Rene Dekart va Per Fermaning analitik geometriyaga asos solishi sabab bo‘ldi.

1. Rene Dekart (1596–1650): Dekart koordinatalar sistemasini kiritish orqali geometrik egri chiziq va algebraik tenglama o‘rtasidagi ko‘prikni o‘rnatdi. Endi har qanday egri chiziqni

tenglama bilan ifodalash mumkin bo'ldi. Dekart (1637): Analitik geometriya – egri chiziqlarni tenglama bilan ifodalash.

Misol: $x^2 + y^2 = 25$ aylana. Bu tenglama y ni x orqali ifodalamaydi (ikki qiymatli), lekin bog'lanishni beradi.

2. Isaak Nyuton va Gotfrid Leybnits: Funksiyaning zamonaviy tushunchasiga eng yaqin kelgan olimlar aynan ular bo'ldi. Nyuton o'zgaruvchilarni "flyuenta" (oqib turuvchi miqdor) deb atagan bo'lsa, "funksiya" terminini ilk bor 1673-yilda Gotfrid Leybnits qo'llagan. U "funksiya" deganda geometrik miqdorlarning (urinma uzunligi, absissa va h.k.) egri chiziqdagi nuqta holatiga bog'liqligini tushungan.

Parabolani $y = x^2$ deb yozgan. Bu bugungi kunda eng oddiy funksiyalardan biridir:

Agar x=2 bo'lsa y=4

Agar x=-3 bo'lsa y=9

Leybnits (1673): "Functio" atamasi. U egri chiziqqa urinmaning qiyaligi dy/dx ni funksiya deb atagan.

Misol: $y = x^3$ funksiyasi uchun $dy/dx = 3x^2$. Leybnits uchun $3x^2$ ham funksiya.

Bernulli (1694): Funksiyani "o'zgaruvchi miqdorlar bilan tuzilgan ifoda" deb ta'rifladi.

Misol: $y = (x^2 + 1)/(x - 1)$ – ratsional funksiya. Agar x=2 bo'lsa y=5, agar x=0 bo'lsa y=-1.

XVII asr oxiridagi tipik misol:

"Biror jismning erkin tushish masofasi $s(t) = 5t^2$ (t sekund, s metr). Bu vaqtning funksiyasidir."

Galiley (1638) bu bog'lanishni eksperiment bilan aniqlagan. Endi funksiya formulalar orqali ifodalanadigan bo'ldi.

XVIII ASR: ANALITIK TA'RIF VA EYLER DAVRI

XVIII asrda funksiya tushunchasi geometriyadan butunlay ajralib, algebraik va analitik shaklga o'tdi.

Iogann Bernulli (1718): U funksiyaga quyidagicha ta'rif beradi: "O'zgaruvchi miqdorning funksiyasi deb, ushbu o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlardan tashkil topgan miqdorga aytiladi".

Leonard Eyler (1707–1783): Funksiya nazariyasining eng buyuk namoyandasi. 1748-yilda u funksiyaning klassik ta'rifini berdi va birinchi bo'lib f(x) belgilashini kiritdi. Eyler funksiyalarni ikki turga: analitik (formulalar yordamida berilgan) va ixtiyoriy (grafik ko'rinishida) turlarga ajratdi.

XIX ASR: QAT'IY LOGIK TA'RIFLAR

XVIII asrda funksiya tushunchasi yanada rivojlandi. Bu davrda Leonhard Eyler katta hissa qo'shdi.

1. Eyler ta'rifi

Eyler funksiyani quyidagicha ta'rifladi:

Funksiya — bu o'zgaruvchining analitik ifodasi orqali berilgan kattalikdir.

U birinchi bo'lib yozuvini f(x) kiritdi, funksiyani formulalar orqali ifodalashni tizimlashtirdi.

Leonard Eyler (1748): f(x) belgisini kiritdi va funksiyalarni turlarga ajratdi.

1. Algebraik funksiyalar:

$f(x) = x^2 - 4x + 7$ (polinom) – har bir x ga bitta y mos keladi.

$g(x) = (x-1)/(x+2)$ (ratsional) – $x \neq -2$ da aniqlangan. Masalan $g(1)=0$.

2. Transsendent funksiyalar (analitik ifoda, ammo algebraik emas):

$f(x) = \sin x$ – trigonometrik funksiya. $\sin(\pi/2)=1$.

$f(x) = e^x$ – eksponensial funksiya. $e^0 = 1$, $e^1 \approx 2{,}718$.

$f(x) = \ln x$ – logarifmik funksiya. $\ln(1)=0$, $\ln(e)=1$.

Eyler shuningdek ba’zi muhim shaxsni aniqladi:

e^{iπ} + 1 = 0 ko‘rinishida eksponensial va trigonometrik funksiyalar bog‘langan.

XVIII asrdagi ta’riflar barcha matematik jarayonlarni (masalan, uzlukli funksiyalar) tushuntirib bera olmas edi. XIX asr matematiklari funksiyaga yanada kengroq va aniqroq ta’rif berishga intildilar.

2. Bernhard Riman va Jef Jofua Dirixle: 1837-yilda Dirixle funksiyaning hozirgi maktab darsliklarida qo‘llaniladigan "moslik" qoidasiga asoslangan ta’rifini berdi: "Agar x ning har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymati mos kelsa, y, x ning funksiyasidir".

Bu davrda matematiklar quyidagi funksiyalarni o‘rgandilar: uzluksiz bo‘lmagan funksiyalar, differensiallanuvchi bo‘lmagan funksiyalar.

Masalan, Dirixle funksiyasi:

Bu ta’rif funksiyaning formula bilan berilishi shart emasligini, balki shunchaki "moslik" ekanini qonunlashtirdi. Masalan, mashhur "Dirixle funksiyasi" aynan shu davrda paydo bo‘ldi.

Misol – murakkab funksiya (kompozisiya):

$h(x) = \sin(x^2)$. Avval x kvadratga oshiriladi, so‘ng sinus olinadi.

$x=\sqrt{\pi} \to x^2=\pi \to \sin(\pi)=0$.

3. Lagranj (1797): Har qanday funksiyani darajali qatorga yoyish mumkin deb hisobladi.

Misol: $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ (bu cheksiz yig‘indi, har qanday x uchun ishlaydi).

Dirixle (1837): “Agar har bir x ga bitta y mos kelsa, $y = f(x)$ funksiyadir. Hech qanday formula shart emas.”

Dirixle funksiyasi (eng mashhur misol):

$D(x) = 1$,agar x ratsional son bo‘lsa,

$D(x) = 0$, agar x irratsional son bo‘lsa.

Bu funksiyani bitta formula bilan yozib bo‘lmaydi. Hech qayerda uzluksiz emas.

Misol: $D(1/2)=1$, $D(\sqrt{2})=0$.

4. Riemann (1851) – Rimann funksiyasi (uzilish nuqtalari zich):

$R(x) = 1/n$, agar $x = m/n$ (qisqartirilgan kasr) bo‘lsa,

$R(x) = 0$, agar x irratsional bo‘lsa.

Misol: $R(1/2)=1/2$, $R(2/3)=1/3$, $R(0{,}333...)=1/3$, $R(\pi)=0$.

Bu funksiya har qanday ratsional nuqtada uzilishga ega, ammo integrallanuvchi.

5. Koshi – uzluksizlik ta’rifi: “f(x) uzluksiz deyiladi, agar kichik o‘zgarishda funksiya qiymati ham kichik o‘zgarsa”.

Misol: $f(x)=x^2$ hamma joyda uzluksiz, chunki x ga 0,1 qo‘shsak f 0,21 ga o‘zgaradi – kichik.

Uzilishli funksiya misoli:

$f(x) = 1/x$, $x=0$ da aniqlanmagan. $x=0$ atrofida cheksiz katta.

Qarshi misol – hech qanday formulaga ega bo‘lmagan, ammo mavjud funksiya:

“Agar x ning o‘nli yoyilmasida 7 raqami birinchi marta juft o‘rinda kelsa, y=1; aks holda y=0.” Bu ham Dirixle ta’rifiga ko‘ra funksiya.

Kantor (1895), Dedekind (1888): Funksiya – bir to‘plam elementlarini ikkinchi to‘plam elementlariga bog‘lovchi qoida.

Zamonaviy ta’rif:

f: A → B, har bir a ∈ A uchun yagona b = f(a) ∈ B.

Misollar:

1. Sonli funksiyalar:

f: ℝ → ℝ, f(x) = x^3 - x. Grafik chizish mumkin.

2. Doimiy funksiya:

f: ℚ → ℤ, f(q) = 5 har qanday ratsional son uchun. Bu funksiya qiymati o‘zgarmaydi.

3. Vektorli funksiya:

f(t) = (cos t, sin t) – aylana chizadi. t vaqt, f(t) tekislikdagi nuqta.

4. Diskret funksiya:

f: {1,2,3,4} → {a,b,c} jadval bilan berilgan: f(1)=a, f(2)=b, f(3)=a, f(4)=c.

5. Funksional (funksiyalar ustida funksiya):

F(f) = $\int_0^1$ f(x) dx. Agar f(x)=x^2 bo‘lsa, F(f) = 1/3. Bu differensial tenglamalarda ishlatiladi.

XX ASR VA HOZIRGI ZAMON: TO‘PLAMLAR NAZARIYASI

XX asrda matematika yanada abstraktlashdi. Funksiya tushunchasi quyidagicha umumlashtirildi:

Funksiya — bu bir to‘plamdan ikkinchi to‘plamga mos qo‘yish qonunidir.

Bu yerda:argumentlar sonlar bo‘lishi shart emas, funksiyalar har qanday obyektlar orasida bo‘lishi mumkin.

1. To‘plamlar nazariyasi

To‘plamlar nazariyasi funksiyani quyidagicha ko‘radi:

har bir x ga yagona y mos keladi.

2. Amaliy fanlarda qo‘llanilishi

Funksiya tushunchasi quyidagi sohalarda keng qo‘llaniladi:

fizika (harakat qonunlari),

iqtisodiyot (talab va taklif),

informatika (algoritmlar),

statistika.

XX asr boshida to‘plamlar nazariyasining (Georg Kantor) rivojlanishi bilan funksiya tushunchasi o‘zining eng yuqori mavhumlik darajasiga yetdi.

N. Burbaki guruhi: Fransuz matematiklar guruhi funksiyani ikki to‘plam elementlari o‘rtasidagi binar munosabatning xususiy holi sifatida ta’riflashdi.

Zamonaviy holat: Bugungi kunda funksiya tushunchasi nafaqat sonli to‘plamlarda, balki operatorlar nazariyasi, funksional analiz va kompyuter fanlarida (dasturlashdagi funksiyalar) fundamental asos bo‘lib xizmat qilmoqda.

XULOSA

Funksiya tushunchasining evolyutsiyasi inson tafakkurining konkretlikdan (sonli jadvallar) mavhumlikka (to‘plamlar o‘rtasidagi moslik) qarab o‘sishini ko‘rsatadi. Ushbu tushunchasiz na zamonaviy fizikani, na muhandislikni va na raqamli texnologiyalarni tasavvur qilib bo‘ladi. Har bir davr matematiklari funksiyaga yangicha ma’no yuklab, uni boyitib bordilar, bu esa matematikaning jonli va doimiy rivojlanuvchi fan ekanligining isbotidir

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. A.N. Kolmogorov, "Matematika tarixi".
2. B.V. Gnedenko "Matematika taraqqiyoti haqida ocherklar".
3. Yusupov A "Matematika tarixi" o‘quv qo‘llanmasi.