BIRINCHI TARTIBLI XUSUSIY XOSILALI CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMINI TOPISH

Jo’rayeva Feruza Baxtiyor qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti
feruzajorayevaasila@mail.ru
Qudratova Zuhra Faxriddin qizi
Shahrisabz davlat pedagogika instituti 2-kurs talabasi
Raxmatullayeva Dinora
Shahrisabz davlat pedagogika instituti 2-kurs talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20083773

Annotatsiya: Ushbu maqolada birinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini topish masalasi batafsil yoritilgan. Xususiy hosilali differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, ular turli tabiiy va texnik jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi. Maqolada ushbu turdagi tenglamalarning umumiy ko‘rinishi, ularning asosiy xossalari hamda yechish usullari nazariy jihatdan tahlil qilingan.

Asosiy e’tibor xarakteristikalar usuliga qaratilib, mazkur usul yordamida differensial tenglamalarni oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltirish jarayoni bosqichma-bosqich tushuntirilgan. Xarakteristik egri chiziqlar tushunchasi, ularning fizik va geometrik ma’nosi hamda umumiy yechimni hosil qilishdagi o‘rni keng yoritilgan. Shuningdek, maqolada aniq misollar yordamida nazariy bilimlar mustahkamlangan va yechimlar ketma-ketligi izchil bayon etilgan.

Bundan tashqari, birinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalarning amaliy ahamiyati ham ko‘rib chiqilgan bo‘lib, ular gaz dinamikasi, issiqlik uzatish jarayonlari, to‘lqinlar nazariyasi va iqtisodiy modellashtirish kabi sohalarda qanday qo‘llanilishi haqida qisqacha ma’lumotlar berilgan. Tadqiqot natijalari ushbu turdagi tenglamalarni o‘rganish va amaliy masalalarda qo‘llashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Kalit so‘zlar

birinchi tartibli differensial tenglamalar, xususiy hosila, chiziqli tenglama, xarakteristikalar usuli, umumiy yechim, differensial tenglamalar, matematik modellashtirish, xarakteristik egri chiziqlar, oddiy differensial tenglamalar, analiz, matematik fizika, tenglamalarni yechish usullari

Kirish

Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama (Qisman differensial tenglama — QDT) — bu ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchili noma’lum funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilalari ishtirok etadigan tenglama. Ushbu maqolada chiziqli birinchi tartibli QDTlar va ularning umumiy yechimini topish usullari batafsil yoritiladi. Asosiy e’tibor xarakteristikalar (egri chiziqlar) usuli va Lagranj usuliga qaratiladi.

Birinchi tartibli ikki o’zgaruvchili xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamaning umumiy ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

Birinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamalar

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \qquad (1)$$

Bu yerda $a = a(x, y), b = b(x, y),\ c = c(x, y), f(x, y), D(\subset R^2)$ sohada aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lib, $a(x, y), b(x, y) \neq (0,0),\ \forall(x, y)\epsilon D$ shartni qanoatlantiradi. R^2-tekislikdagi γ −egri chiziq ushbu

$$x = \varphi(s),\quad y = \psi(s), s\epsilon I = (s_1, s_2)$$

ko'rinishidagi tenglamasi berilgan bo'lib,

$$(\varphi'(s), \psi(s)) \neq (0,0)\ \ \forall s \neq I$$

Shartni qanoatlantirsin. Boshqacha aytganda, γ −silliq bo'lsin.

Aytaylik, γ chiziqda $u(x, y)$ −noma'lum funksiyaning qiymati

$$u|_\gamma = h(s) \qquad (2)$$

ya'ni

$$u|_\gamma = u\big(\varphi(s), \psi(s)\big) = h(s),\quad \forall\epsilon I \qquad (3)$$

berilgan bo'lsin. Bu yerda h$\epsilon C^1(I)$ − berilgan differensiallanuvchi funksiya.

Ta'rif. (1) xususiy hosilali differensial tenglamaning (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimni topishga Koshi masalasi deyiladi.

(1) ko'rinishdagi xususiy hosilali differensial tenglamaga mos keluvchi xarakteristik tenglama ushbu

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \frac{dy}{dt} = b(x, y) \qquad (4)$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu oddiy differensial tenglamalar sistemasining yechimlari (fazoviy trayektoriyalari) (1) xususiy hosilali differensial tenglamaning xarakteristikalari deyiladi. Xarakteristikalari bilan (1) xususiy hosilali differensial tenglama o'rtasida uzviy bog'lanish mavjud.

$u = u(x, y)$— noma'lum funksiya
a, b, c, d–berilgan funksiyalar (koeffitsiyentlar);

Bir jinsli chiziqli tenglama

Bir jinsli holat:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y)u$$

Agar $c(x, y) \equiv 0$, bo'lsa, oddiy bir jinsli tenglama hosil bo'ladi:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$$

Xarakteristikalar usuli

Xarakteristikalar usuli- birinchi tartibli QDTni oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltirib yechish usuli.

Bir jinsli tenglama $au_x + bu_y = 0$ uchun xarakteristik egri chiziqlar quyidagi ODT sistemasidan aniqlanadi:

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = b(x,y),$$

Yoki simmetrik ko'rinishda:

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)}$$

Bu differensial tenglamaning yechimi birinchi integral deb ataladigan $\varphi(x,y) = C$ ko'rinishidagi funksiyadir.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

Agar $\varphi(x,y) = C$ xarakteristikalarning birinchi integrali bo'lsa, u holda $au_x + bu_y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi:

$$u(x,y) = F(\varphi(x,y))$$

Bu yerda F-ixtiyoriy differinsiallanuvchi funksiya.

Oddiy bir jinsli tenglamaga misol

Tenglama:

$$\frac{du}{dx} + 2y\frac{du}{dy} = 0$$

Xaraktiristik tenglama:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \qquad 2ydx = dy$$

Integrallaymiz: $\frac{dy}{dx} = 2y \qquad \rightarrow y = y_0 e^{2x}$.

Xaraktiristika bo'ylab $ye^{-2x} = C$. Demak $\varphi(x,y) = \ ye^{-2x}$

Umumiy yechim:

$$u(x,y) = F(\ ye^{-2x})$$

Lagranj usuli

Lagranj usulida bir jinsli emas tenglamani yechish uchun xarakteristik tenglamalar tizimi yoziladi:

$$\frac{dx}{a(x,y)} = \frac{dy}{b(x,y)} = \frac{du}{c(x,y)u+d(x,y)}$$

Bu tenglamalardan ikkita chiziqli erkli birinchi integral topiladi:

$$\varphi_1(x,y,u) = C_1 \quad \text{va} \quad \varphi_2(x,y,u) = C_2$$

$$\varphi_2 = F(\varphi_1)$$

bu yerda F-ixtiyoriy funksiya.

Xusussiy hol: bir jinsli tenglama $au_x + bu_y = 0$

Bu tenglamaning muhim xususiyati:u xarakteristikalar bo'ylab o'zgarmas.

Teorema: Agar $\psi(x,y)$ funksiya $a\,\psi_x + b\,\psi_y = 0$ tenglamaning biror yechimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy differensiallanuvchi F funksiya uchun $u = F(\psi)$ ham yechim bo'ladi.

Mavzu bo'yicha batafsil misollar

Misol 1: Oddiy bir jinsli tenglama

$$x\,u_x + y\,u_y = 0$$

Birinchi integral: $\varphi(x,y) = \frac{x}{y}$

Umumiy yechim: $u(x,y) = F(\frac{x}{y})$

Misol 2: Bir jinsli tenglama

$$u_x + 2xu_y = u + x$$

Xarakteristikalar: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{u+x}$

Birinchi munosabat: $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow y = x^2 + C_1$

Demak, birinchi integral: $\varphi_1 = y - x^2 = C_1$

Ikkinchi munosabat: $\frac{dx}{1} = \frac{du}{u+x}$

$$\frac{du}{dx} - u = x$$

Yechimi: $ue^{-x} = \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C_2 \rightarrow u = -x - 1 + C_2e^x$

C_2 ni φ_1 orqali ifodalaymiz:

$$\varphi_2 = (u + x + 1)e^{-x} = C_2$$

Umumiy yechim: $\varphi_2 = F(\varphi_1)$

$$(u + x + 1)e^{-x} = F(y - x^2)$$

Yagonaliligi. Faraz qilaylik, berilgan masala ikkita $u_1(x,y)$ va $u_2(x,y)$ yechimlarga ega bo'lsin. Quyidagi

$$\bar{u} = u_1 - u_2$$

belgilashni kiritaylik. Ko'rinib turibdiki, $\bar{u}$(x,y) funksiya ushbu

$$a(x,y)\frac{d\bar{u}}{dx} + b(x,y)\frac{d\bar{u}}{dy} + c(x,y)\bar{u} = 0$$

$$\bar{u}|_{\gamma} = 0$$

Koshi masalasining yechimdan iborat.

$$\frac{d\bar{u}}{dt} - c\bar{u} = 0$$

$$\bar{u}|_{t=0} = 0$$

Bu Koshi masalasi faqat $\bar{u} = 0$ nol yechimga ega bo'lishi ravshan. Bundan $u_1 - u_2$ kelib chiqadi.

Xulosa

Birinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy yechimini topishning asosiy usuli — xarakteristikalar usuli (Lagranj usuli). Bu usul QDTni oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiradi. Asosiy nazariy natija:

Bir jinsli tenglama $au_x + bu_x = 0$ ning umumiy yechimi $u = F(\varphi)$, bunda $\varphi -$ xarakteristikalarning birinchi integrali.

Bir jinsli emas tenglama uchun xarakteristikalar bo'ylab u ning o'zgarishini ifodalovchi ikkinchi birinchi integral topiladi va umumiy yechim bu ikkala birinchi integral orasidagi ixtiyoriy munosabatdan kelib chiqadi.

Bu usullar mexanika, fizika (to'lqin tenglamalari, issiqlik o'tkazuvchanlik), iqtisodiyot va muhandislikda keng qo'llaniladi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Polyanin, A. D., & Nazaikinskii, V. E. (2015). Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, 2nd Edition.
2. Delgado, M. (1997). The Lagrange-Charpit method. SIAM Review, 39(2), 298-304.
3. O'Reilly onlayn kutubxonasi materiallari: Birinchi tartibli tenglamalar uchun umumiy yechim formulalari.
4. Jo'rayev T. J., Fayziyev A. K. — Xususiy hosilali differensial tenglamalar. Toshkent: «Universitet», 2020. — 280 b.
5. Salohiddinov M. S., Egamov M. T. — Matematik fizika tenglamalari. Toshkent: «O'qituvchi», 1988. — 304 b.
6. Tihonov A. N., Samarskiy A. A. — Matematik fizika tenglamalari. Moskva: «Nauka», 1977. — 736 b. (Rus tilida)
7. Petrovskiy I. G. — Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi bo'yicha ma'ruzalar. Moskva: «Nauka», 1970. — 400 b. (Rus tilida)
8. Vladimirov V. S. — Matematik fizika tenglamalari. Moskva: «Nauka», 1981. — 512 b. (Rus tilida)