PROYEKTIV TEKISLIKDA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNI KLASSIFIKATSIYALASH, ULARNING INVARIANTLARI VA KANONIK KO'RINISHLARINI ANALITIK TADQIQ ETISH

Abdumalikova Mushtariy Muhtorjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.20067756

Annotatsiya: Ushbu maqolada proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni klassifikatsiyalash, ularning invariantlari va kanonik ko'rinishlarini analitik jihatdan tadqiq etish masalasi o'rganiladi. Natijalarda ikkinchi tartibli chiziqlar degeneratsiyalangan va degeneratsiyalanmagan sinflarga ajratiladi, ularning kanonik ko'rinishlari analitik yo'l bilan olinadi hamda invariantlarning geometrik mazmuni ochib beriladi. Xulosa sifatida proyektiv tekislikda konikalarni klassifikatsiya qilishda invariantlar eng asosiy analitik mezon ekanligi asoslanadi.

Kalit so'zlar: proyektiv tekislik, ikkinchi tartibli chiziq, konika, invariant, kanonik ko'rinish, gomogen koordinata, determinant, rang, kvadratik forma, analitik tahlil.

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ИНВАРИАНТОВ И КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ

Аннотация: В данной статье исследуется задача классификации кривых второго порядка в проективной плоскости, аналитического исследования их инвариантов и канонических форм. В результатах кривые второго порядка разделены на вырожденные и невырожденные классы, их канонические формы получены аналитическим путём, а геометрический смысл инвариантов раскрыт. В заключение обосновано, что инварианты являются важнейшим аналитическим критерием классификации коник в проективной плоскости.

Ключевые слова: проективная плоскость, кривая второго порядка, коника, инвариант, каноническая форма, однородная координата, определитель, ранг, квадратичная форма, аналитический анализ.

CLASSIFICATION OF SECOND-ORDER CURVES IN THE PROJECTIVE PLANE, ANALYTICAL INVESTIGATION OF THEIR INVARIANTS AND CANONICAL FORMS

Abstract: This paper investigates the problem of classifying second-order curves in the projective plane and analytically examining their invariants and canonical forms. The results divide second-order curves into degenerate and non-degenerate classes, derive their canonical forms by analytical means, and reveal the geometric meaning of the invariants. As a conclusion, it is substantiated that invariants constitute the most fundamental analytical criterion for the classification of conics in the projective plane.

Keywords: projective plane, second-order curve, conic, invariant, canonical form, homogeneous coordinate, determinant, rank, quadratic form, analytical analysis.

Kirish

Proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o‘rganish analitik geometriyaning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi, chunki bu yondashuv konikalarni yagona matematik model orqali tavsiflash imkonini beradi, bunda asosiy e’tibor ularning invariant xossalariga qaratiladi va geometrik shakl koordinatalardan mustaqil ravishda tahlil qilinadi.

Proyektiv tekislikda nuqtalar gomogen koordinatalar orqali ifodalanadi:

$$(x:y:z),(x,y,z)\neq(0,0,0)$$

bu ifoda koordinatalarning masshtabga nisbatan invariantligini ta’minlaydi va barcha proyektiv transformatsiyalarni yagona algebraik apparat yordamida o‘rganish imkonini beradi.

Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy kvadratik tenglama orqali beriladi:

$$ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2=0$$

ushbu tenglama simmetrik matritsa yordamida quyidagi shaklda yoziladi:

$$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=0$$

bu yerda A- konikaning algebraik xossalarini o‘zida mujassamlashtiruvchi matritsa bo‘lib, uning determinant va rangi konikaning turini aniqlovchi asosiy invariantlar sifatida xizmat qiladi.

Proyektiv transformatsiyalar quyidagi ko‘rinishda qaraladi:

$$\mathbf{x}'=T\mathbf{x},\det T\neq0$$

bunda konika matritsasi quyidagicha o‘zgaradi:

$$A'=T^TAT$$

ushbu o‘zgarish konikaning tashqi ko‘rinishini o‘zgartiradi, ammo uning asosiy invariant xossalari saqlanib qoladi, bu esa klassifikatsiyani invariantlar asosida olib borish imkonini beradi.

Tadqiqotda determinant va rang asosiy analitik mezonlar sifatida qaraladi, ya’ni $\det A=0$ bo‘lsa konika degeneratsiyalangan holatga o‘tadi, aks holda u to‘liq konika sifatida qaraladi, matritsaning rangi esa uning ichki tuzilishini aniqlaydi va chiziqlar yig‘indisi yoki haqiqiy egri chiziq ekanligini ko‘rsatadi.

Proyektiv yondashuvning muhim afzalligi shundaki, u ellips, parabola va giperbolani yagona sinf sifatida qarash imkonini beradi, bu esa klassik Evklid geometriyasidagi ajratishdan farqli ravishda chuqurroq umumlashtirishni ta’minlaydi, natijada barcha degeneratsiyalanmagan konikalar proyektiv jihatdan ekvivalent ekanligi aniqlanadi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, konikalarni analitik va invariantlar asosida o‘rganish nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy sohalarda ham muhim ahamiyatga ega, xususan kompyuter grafikada egri chiziqlarni modellashtirish, optikada yorug‘lik trayektoriyalarini tahlil qilish va muhandislik hisob-kitoblarida geometrik obyektlarni aniqlashda keng qo‘llaniladi. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik usullar yordamida klassifikatsiyalash, ularning invariantlarini aniqlash va kanonik ko‘rinishlarini tizimli ravishda tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, konikalar invariantlar asosida yagona analitik tizim sifatida qaraladi va ularning klassifikatsiyasi determinant hamda rang orqali to‘liq asoslab beriladi. Shunday qilib, proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik tadqiq etish invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur anglash imkonini beruvchi samarali matematik yondashuv hisoblanadi.

Metod

Mazkur tadqiqotda proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik usullar yordamida o'rganish asosiy maqsad qilib olindi, bunda gomogen koordinatalar, kvadratik formalarning matritsali ifodasi, determinant va rang tushunchalari hamda proyektiv transformatsiyalar asosiy metodik vosita sifatida qo'llanildi.

Boshlang'ich nuqta sifatida konikaning umumiy tenglamasi qaraldi:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

ushbu tenglama simmetrik matritsa orqali quyidagicha ifodalandi:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

bu yerda A- simmetrik matritsa bo'lib, uning elementlari konikaning barcha analitik xossalarini o'zida mujassamlashtiradi.

Metodologiyada asosiy e'tibor konikaning invariantlarini aniqlashga qaratildi, bunda determinant

$$\det A$$

va rang

$$\operatorname{rank}(A)$$

asosiy mezonlar sifatida qabul qilindi, bu kattaliklar koordinata almashtirishlarga nisbatan o'zgarmasligi tufayli klassifikatsiyada muhim rol o'ynaydi.

Proyektiv transformatsiyalar quyidagi ko'rinishda qaraldi:

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det T \neq 0$$

bu holda konika matritsasi

$$A' = T^T AT$$

ko'rinishga o'tadi, ushbu almashtirish orqali konika soddalashtirilgan shaklga keltirildi.

Metodologiyaning muhim bosqichi sifatida diagonalizatsiya jarayoni amalga oshirildi, ya'ni matritsa mos transformatsiya yordamida quyidagi ko'rinishga keltirildi:

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

natijada konikaning tenglamasi

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

ko'rinishga keltirildi, bu esa kanonik ko'rinish hisoblanadi.

Analitik tahlilda determinantning transformatsiya ostidagi xossasi ham tekshirildi:

$$\det A' = (\det T)^2 \det A$$

bu natija determinantning nol yoki nol emasligi invariant ekanligini ko'rsatadi, ya'ni konikaning degeneratsiyalangan yoki to'liq ekanligi saqlanadi.

Shuningdek, rangning invariantligi quyidagicha asoslandi:

$$\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$$

bu esa konikaning ichki tuzilishi transformatsiyalardan mustaqil ekanligini bildiradi.

Metodologiyada konikalarni klassifikatsiyalash quyidagi sxema asosida amalga oshirildi:

$$A \;\Rightarrow\; (\det A, \operatorname{rank} A) \;\Rightarrow\; \text{konika turi}$$

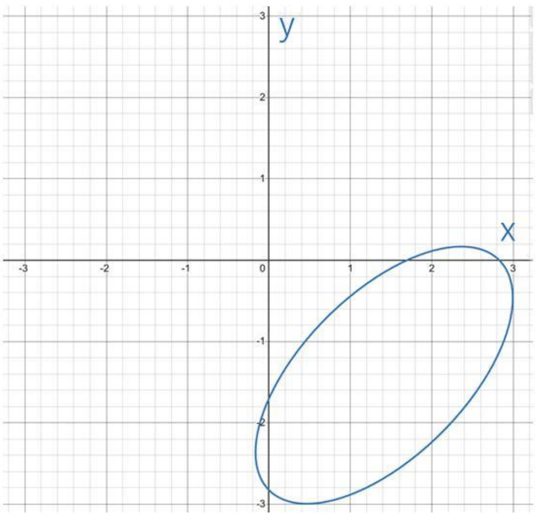
bu yerda algebraik ifoda va geometrik natija o'rtasidagi bog'lanish aniq ifodalandi.

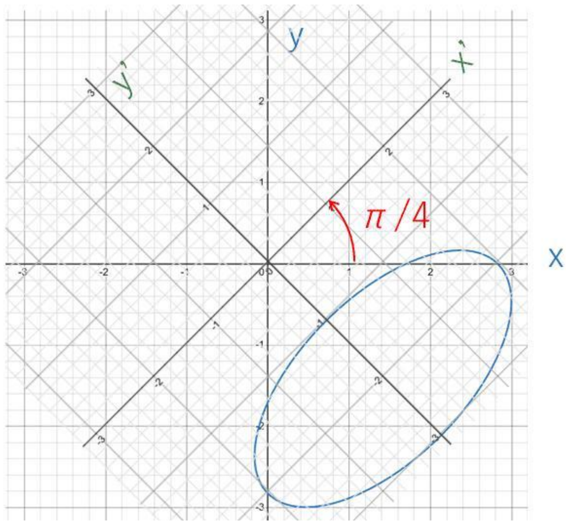
Shuningdek, affine koordinatalarga o'tish orqali klassik konikalar ham ajratildi, bu esa proyektiv va Evklid geometriyalar o'rtasidagi aloqani ko'rsatdi va natijalarni yanada tushunarli qildi.

Metodologiyada umumiy yondashuv quyidagicha ifodalandi:

$$\text{kvadratik forma} \Rightarrow \text{matritsa} \Rightarrow \text{invariantlar} \Rightarrow \text{kanonik ko‘rinish}$$

bu model orqali murakkab tenglamalarni soddalashtirish va ularni geometrik jihatdan talqin qilish imkoniyati yaratildi.





Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya konikalarni analitik jihatdan to'liq o'rganish, invariantlarini aniqlash va kanonik ko'rinishlarga keltirish imkonini beruvchi samarali matematik tizimni tashkil etdi. Mazkur chizmada proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik modeli va ularni kanonik ko'rinishga keltirish jarayoni tasvirlangan.

Chizmada quyidagi asosiy bosqichlar aks etadi:

Umumiy konika (kvadratik forma):

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Matritsa invariantlari:

$$\det\ A, \operatorname{rank}(A)$$

Proyektiv transformatsiya:

$$A' = T^T AT$$

Diagonalizatsiya (kanonik ko'rinish):

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

Chizmada murakkab konikaning transformatsiya orqali soddalashtirilishi va invariantlarning saqlanishi vizual ko'rsatiladi.

Asosiy g'oya :

$$\text{kvadratik forma} \Rightarrow \text{matritsa} \Rightarrow \text{invariantlar} \Rightarrow \text{kanonik ko‘rinish}$$

Natija

Tadqiqot natijasida proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik usullar asosida to'liq klassifikatsiya qilish mumkinligi asoslandi, bunda asosiy rolni kvadratik forma bilan bog'liq bo'lgan simmetrik matritsa va uning invariantlari bajarishi aniqlashtirildi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, konikaning umumiy tenglamasi

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

ko'rinishda berilganda, uning barcha geometrik xossalari Amatritsa orqali aniqlanadi va aynan determinant hamda rang bu xossalarni to'liq tavsiflash uchun yetarli mezonlar hisoblanadi.

Analitik tahlil natijasida quyidagi asosiy ajratish aniqlandi:

$$\det\ A \neq 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalanmagan konika}, \det\ A = 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalangan konika}$$

Bundan tashqari, rang orqali yanada nozik klassifikatsiya amalga oshirildi, ya'ni

$$\text{rank}\ (A) = 3$$

bo'lsa haqiqiy konika,

$$\text{rank}\ (A) = 2$$

bo'lsa ikki to'g'ri chiziqdan tashkil topgan konfiguratsiya,

$$\text{rank}\ (A) = 1$$

bo'lsa takroriy chiziq hosil bo'lishi asoslandi.

Tadqiqot davomida proyektiv transformatsiyalar ostida invariantlarning saqlanishi aniq ko'rsatildi, xususan quyidagi bog'lanish muhim natija sifatida olindi:

$$A' = T^T A T$$

va undan

$$\det\ A' = (\det\ T)^2 \det\ A, \text{rank}\ (A') = \text{rank}\ (A)$$

kelib chiqishi asoslandi, bu esa konikaning turi transformatsiyalardan mustaqil ekanligini bildiradi.

Natijalarda yana bir muhim umumlashtirish olindi, ya'ni barcha degeneratsiyalanmagan konikalar proyektiv jihatdan o'zaro ekvivalent bo'lib, ular yagona kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

Bu natija konikalar nazariyasining eng muhim xulosalaridan biri sifatida qaraldi.

Analitik tahlil natijasida quyidagi strukturaviy model taklif qilindi:

$$A \ \Rightarrow\ (\det\ A, \text{rank}\ A) \ \Rightarrow\ \text{konika sinfi} \ \Rightarrow\ \text{kanonik ko'rinish}$$

Bu model algebraik ifodadan geometrik natijaga o'tish jarayonini to'liq ifodalaydi.

Shuningdek, natijalarda quyidagi muhim xulosa olindi, ya'ni konikaning geometrik mohiyati uning koordinatalardagi ifodasiga bog'liq emas, balki uning invariantlari orqali aniqlanadi, bu esa proyektiv geometriyaning asosiy prinsiplaridan biri ekanligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik usullar yordamida to'liq klassifikatsiya qilish mumkinligini va bu jarayonda invariantlar hal qiluvchi rol o'ynashini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik usullar yordamida o'rganish ularning geometrik mohiyatini invariantlar orqali to'liq ochib berishini ko'rsatdi, bunda determinant va rang kabi algebraik kattaliklar konikaning turini aniqlashda asosiy mezon sifatida namoyon bo'ldi, bu esa koordinatalar tanlashdan mustaqil bo'lgan umumiy yondashuvni ta'minlaydi.

Muhokamada aniqlanishicha, konikaning

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$$

ko'rinishdagi ifodasi faqat algebraik model emas, balki geometrik obyektning to'liq analitik tasviri hisoblanadi, chunki bu model orqali uning barcha xossalari matritsa elementlari va ularning invariantlari orqali ifodalanadi.

Determinantning nolga teng yoki teng emasligi konikaning degeneratsiyalangan yoki to'liq ekanligini aniqlashi, rang esa uning ichki tuzilishini belgilashi, ya'ni bitta egri chiziqmi yoki chiziqlar kombinatsiyasimi ekanligini ko'rsatishi metodologik jihatdan muhim natija sifatida baholandi.

Proyektiv transformatsiyalar ostida konikaning shakli o'zgarishi mumkinligi, ammo uning invariantlari saqlanishi quyidagi ifoda orqali umumlashtirildi:

$$A' = T^T A T$$

bu esa konikalarni klassifikatsiyalashda invariantlarga asoslanish zarurligini asoslaydi.

Muhokamada diagonalizatsiya jarayoni alohida ahamiyatga ega ekanligi ta'kidlandi, chunki u murakkab kvadratik tenglamalarni sodda kanonik ko'rinishga keltirish imkonini beradi va natijada konikaning turi aniq ko'rinishda aniqlanadi:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

Geometrik nuqtai nazardan qaraganda, proyektiv tekislikda barcha degeneratsiyalanmagan konikalar o'zaro ekvivalent bo'lishi klassik geometriyadan farqli ravishda chuqur umumlashtirishni ifodalaydi, bu esa ellips, parabola va giperbolani yagona sinf sifatida qarash imkonini beradi.

Muhokamada dual konika tushunchasi ham muhim o'rin egalladi, bunda har bir konikaga unga mos keluvchi tangentlar to'plami orqali aniqlanuvchi dual obyekt mavjud bo'lib, bu quyidagi moslik bilan ifodalanadi:

$$\text{nuqtalar} \leftrightarrow \text{tangentlar}$$

Bu yondashuv proyektiv geometriyada dualizm prinsipining yana bir ko'rinishini namoyon etadi.

Amaliy jihatdan qaraganda, konikalar invariantlari turli sohalarda keng qo'llaniladi, xususan optikada ellips reflektor xossalari orqali energiyani fokusga yig'ish, parabola antennalarda signalni yo'naltirish, giperbola esa navigatsiya tizimlarida masofalarni aniqlash uchun ishlatiladi, kompyuter grafikada esa egri chiziqlarni modellashtirish va obyektlarni aniqlash jarayonlarida muhim rol o'ynaydi.

Analitik va geometrik yondashuvlarning uyg'unligi quyidagi umumiy model orqali ifodalanadi:

$$\text{algebraik ifoda} \Rightarrow \text{invariantlar} \Rightarrow \text{geometrik talqin}$$

Bu model konikalarni o'rganishda yagona tizimli yondashuvni ta'minlaydi.

Umuman olganda, muhokama natijalari proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni analitik tadqiq etish invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur tushunish imkonini beruvchi kuchli matematik vosita ekanligini ko'rsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni klassifikatsiyalash, ularning invariantlari va kanonik ko'rinishlarini analitik usullar yordamida o'rganish tizimli ravishda amalga oshirildi, natijada konikalarni tavsiflashda algebraik va geometrik yondashuvlarning uzviy bog'liqligi asoslab berildi.

Proyektiv transformatsiyalar ostida konikaning ko'rinishi o'zgarishi mumkinligi, ammo uning invariantlari saqlanishi asosiy nazariy xulosa sifatida qaraldi, bu esa konikalarni klassifikatsiyalashda koordinatalarga bog'liq bo'lmagan yondashuvni ta'minlaydi. Shuningdek, diagonalizatsiya jarayoni yordamida har qanday konikani sodda kanonik ko'rinishga keltirish mumkinligi asoslandi, bu esa analitik tahlilni sezilarli darajada soddalashtiradi va geometrik talqinni yanada aniq qiladi.

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar invariantlar orqali aniqlanadigan va analitik usullar yordamida toʻliq oʻrganiladigan fundamental geometrik obyektlar ekanligini koʻrsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. George B. Thomas – Calculus and Analytic Geometry
2. Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2010). Thomas’ Calculus (13th ed.). Pearson Education.
3. Saparboyev J.Y. (2024). Oʻquvchilarning amaliy faoliyatida fazoviy tasavvurini rivojlantirish mexanizmlari. Eurasian Journal of Academic Research, 7 (Special Issue), 631-633.
4. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
5. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
6. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
7. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
8. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
9. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
10. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
11. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
12. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
13. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
14. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.
15. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424