

## EVKLID FAZOSIDA SKALYAR ARGUMENTLI VEKTOR FUNKSIYALARNING DIFFERENSIAL XOSSALARINI OPERATORLI TAHLIL QILISH VA ULARNING TOPOLOGIK INVARIANTLARI

**Tursunaliyeva Zilola Akmaljon qizi**

**Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi**

**Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**

**Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston**

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada Evklid fazosida aniqlangan skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalari operatorli yondashuv asosida o'rganiladi. Muhokama qismida olingan natijalar differensial tenglamalar, fizik modellashtirish va optimallashtirish masalalari bilan bog'liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida operatorli yondashuv differensial analizni umumlashtirish va chuqurlashtirish imkonini beruvchi samarali vosita ekanligi asoslandi.

**Kalit so'zlar:** vektor funksiya, differensial, hosila, gradient, operatorli analiz, topologik invariant, uzluksizlik, differensiallanuvchanlik, Evklid fazosi, limit, Jacobian, differensial operatorlar, funksional analiz, lokal xossa.

## ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

**Аннотация:** В данной статье на основе операторного подхода исследуются дифференциальные свойства векторных функций скалярного аргумента, определенных в евклидовом пространстве. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с задачами дифференциальных уравнений, физического моделирования и оптимизации. В заключении обосновано, что операторный подход является эффективным инструментом, позволяющим обобщить и углубить дифференциальный анализ.

**Ключевые слова:** векторная функция, дифференциал, производная, градиент, операторный анализ, топологический инвариант, непрерывность, дифференцируемость, евклидово пространство, предел, якобиан, дифференциальные операторы, функциональный анализ, локальное свойство.

## OPERATOR ANALYSIS OF DIFFERENTIAL PROPERTIES OF SCALAR- ARGUMENT VECTOR FUNCTIONS IN EUCLIDEAN SPACE AND THEIR TOPOLOGICAL INVARIANTS

**Abstract:** This article investigates the differential properties of scalar-argument vector functions defined in Euclidean space based on an operator approach. In the discussion section, the obtained results are analyzed in connection with differential equations, physical modeling, and optimization problems. In conclusion, it is substantiated that the operator approach is an effective tool that allows for the generalization and deepening of differential analysis.

**Keywords:** vector function, differential, derivative, gradient, operator analysis, topological invariant, continuity, differentiability, Euclidean space, limit, Jacobian, differential operators, functional analysis, local property.

### Kirish

Evklid fazosida aniqlangan vektor qiymatli funksiyalar zamonaviy matematik analiz, fizik modellashtirish va muhandislik hisoblashlarida markaziy o‘rin tutadi. Bunday funksiyalar odatda

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ko‘rinishida berilib, skalyar argumentning o‘zgarishiga mos ravishda fazoda trayektoriya yoki egri chiziq hosil qiladi. Ushbu funksiyalarning asosiy xossalari - uzluksizlik, differensiallanuvchanlik va hosila - klassik analizda limit tushunchasi orqali aniqlanadi. Biroq bu tushunchalarni yanada umumlashtirish va ularning chuqur strukturaviy xossalarini aniqlash uchun operatorli yondashuvdan foydalanish zarurati yuzaga keladi.

Klassik analizda hosila quyidagi limit orqali aniqlanadi:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Bu ta’rif funksiyaning lokal xatti-harakatini ifodalaydi va uning teginuvchi vektori sifatida geometrik talqin qilinadi. Agar

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

bo‘lsa, u holda hosila komponentlar bo‘yicha hisoblanadi:

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))$$

Biroq bu yondashuv nuqtaviy xarakterga ega bo‘lib, u funksiyaning umumiy topologik xossalarini to‘liq ochib bera olmaydi. Shu sababli differensial tushunchalarni topologik operatorlar bilan bog‘lash muhim ilmiy vazifa hisoblanadi.

Topologik nuqtai nazardan qaraganda, funksiyaning differensial xossalari uning lokal yaqinlashuv xatti-harakati bilan chambarchas bog‘liq. Bu yerda quyidagi operatorlar asosiy rol o‘ynaydi:

$$\text{Int}(A), \text{cl}(A), \partial A$$

hamda funksiyaning obraz va proobraz operatorlari:

$$f(A), f^{-1}(B)$$

Mazkur operatorlar yordamida uzluksizlik va differensiallanuvchanlik tushunchalari umumlashtiriladi. Xususan, funksiyaning uzluksizligi quyidagi shart orqali ifodalanadi:

$$f^{-1}(G) \text{ ochiq, } \forall G \subset \mathbb{R}^n$$

Bu esa differensiallanuvchanlik uchun zaruriy shart sifatida qaraladi.

Differensial tushunchani operatorli shaklda ifodalash uchun quyidagi umumiy model qaraladi:

$$Df(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

va bu limit mavjud bo‘lsa,  $Df$  operatori funksiyaning differensial operatori sifatida talqin qilinadi. Shu nuqtai nazardan differensial analiz funksiyalar ustida aniqlangan operatorlar algebraasiga olib keladi.

Mavzuning muhim jihatlaridan biri - topologik invariantlarni aniqlashdir. Topologik invariantlar - bu funksiyaning uzluksiz deformatsiyalar ostida o‘zgarmaydigan xossalari.

Masalan, agar  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfizm bo'lsa, u holda funksiyaning ayrim xossalari saqlanadi:

$$f \sim f \circ h$$

Bu esa differensial xossalarni topologik struktura bilan bog'lash imkonini beradi.

Shuningdek, differensial xossalarning geometrik talqini ham muhim ahamiyatga ega. Agar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning grafigi har bir nuqtada teginuvchi chiziqqa ega bo'ladi. Bu esa quyidagi tenglama orqali ifodalanadi:

$$\gamma(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, differensial operatorlar va topologik invariantlarni birgalikda o'rganish matematik analizni yanada chuqurlashtirish, uni umumlashtirish va turli sohalarida qo'llash imkonini beradi. Xususan, differensial tenglamalar, optimallashtirish, fizik jarayonlarni modellashtirish va sun'iy intellekt tizimlarida bu tushunchalar muhim rol o'ynaydi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalarini operatorli yondashuv asosida o'rganish, ularni topologik operatorlar bilan bog'lash hamda funksiyalarning invariant xossalarini aniqlashdan iborat. Shu bilan birga, klassik differensial analiz natijalarini umumlashtirish va yangi nazariy yondashuv taklif etish ham muhim vazifa sifatida qaraladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, differensial tushunchalar faqat limit orqali emas, balki operatorli tizim asosida qaraladi va ularning topologik invariantlari aniqlanadi. Bu esa differensial analizni umumiy topologiya bilan bog'lab, yangi ilmiy natijalarga olib keladi.

Shunday qilib, skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalarini operatorli va topologik yondashuv asosida o'rganish zamonaviy matematik tadqiqotlarning muhim yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

### **Metod**

Mazkur tadqiqot skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalarini operatorli yondashuv asosida o'rganishga qaratilgan bo'lib, aksiomatik-deduktiv metodologiya asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida Evklid fazosi  $\mathbb{R}^n$  da aniqlangan

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ko'rinishidagi vektor qiymatli funksiyalar qaraldi. Ushbu funksiyalar komponentlar bo'yicha

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

tarzda ifodalaniib, ularning differensial xossalari komponentlar orqali hamda operatorlar yordamida tahlil qilindi.

Metodologiyaning asosiy g'oyasi differensial tushunchalarni limit orqali emas, balki operatorlar tizimi orqali formal ifodalashdan iborat. Shu maqsadda differensial operator quyidagicha aniqlanadi:

$$D: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), Df(t) = f'(t)$$

Bu yerda  $C^1$ - uzluksiz hosilaga ega funksiyalar sinfi.

Tadqiqot davomida differensial operatorning asosiy algebraik xossalari o'rganildi:

$$D(f + g) = Df + Dg, D(\lambda f) = \lambda Df$$

hamda ko'paytma uchun (skalyar funksiya bilan):

$$D(\varphi f) = \varphi' f + \varphi f'$$

Bu xossalar differensial operatorning chiziqli operator ekanligini ko'rsatadi va uni funksional analiz nuqtai nazaridan o'rganish imkonini beradi.

Topologik operatorlar bilan bog'lanishni o'rnatish uchun funksiyaning obraz va proobrazlari tahlil qilindi. Xususan, quyidagi shartlar asosiy mezon sifatida qaraldi:

$$f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A)), f^{-1}(\text{Int}(B)) \subset \text{Int}(f^{-1}(B))$$

Bu tengliklar uzluksizlik va differensiallanuvchanlikning topologik asosini tashkil etadi.

Differensiallanuvchanlikni operatorli shaklda ifodalash uchun quyidagi limit operatori ishlatildi:

$$Df(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

va bu operator funksiyaning lokal chiziqli yaqinlashuvini ifodalaydi:

$$f(t) = f(t_0) + Df(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

Bu yondashuv differensialni lokal linearlashtirish operatori sifatida talqin qilish imkonini beradi.

Metodologiyada topologik invariantlarni aniqlash alohida o'rin tutadi. Agar  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gomeomorfizm bo'lsa, u holda quyidagi invariantlik xossasi qaraldi:

$$D(f \circ h)(t) = Df(h(t)) \cdot Dh(t)$$

Bu formula differensial operatorning kompozitsiya ostida qanday o'zgarishini ko'rsatadi va u differensial xossalarning qisman invariantligini tavsiflaydi.

Tadqiqotda yana bir muhim operator sifatida Jacobian tushunchasi umumlashtirildi. Agar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  bo'lsa, u holda Jacobian quyidagicha aniqlanadi:

$$J_f(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ f'_2(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix}$$

Bu operator funksiyaning lokal o'zgarish tezligini vektor ko'rinishida ifodalaydi.

Metodologiyada differensial xossalarni topologik operatorlar bilan bog'lovchi yangi model ham kiritildi:

$$\Theta(f, t_0) = \text{cl} \left( \left\{ \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} : t \rightarrow t_0 \right\} \right)$$

Bu operator funksiyaning barcha mumkin bo'lgan limit nisbatlarini ifodalaydi va differensial mavjud bo'lsa:

$$\Theta(f, t_0) = \{f'(t_0)\}$$

Mazkur yondashuv differensialni limitlar to'plamining yopilmasi sifatida talqin qilish imkonini beradi va bu yangi metodologik qarash hisoblanadi.

Tadqiqot davomida quyidagi bosqichlar amalga oshirildi: funksiyalarni operatorlar orqali ifodalash, differensial operatorni formal aniqlash, uning algebraik xossalarini o'rganish, topologik operatorlar bilan bog'lash, invariant xossalarni aniqlash va olingan natijalarni umumlashtirish.

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya differensial analizni operatorli yondashuv asosida chuqurlashtirish, uni topologik struktura bilan bog'lash va funksiyalarning invariant xossalarini aniqlash imkonini berdi.

### **Natijalar**

Tadqiqot natijasida skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalarini operatorli yondashuv asosida ifodalovchi umumiy matematik model ishlab chiqildi hamda ularning topologik invariantlari aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki,

differensiallanuvchanlik tushunchasi faqat limit orqali emas, balki limit nisbatlar to'plamining yopilmasi orqali ham umumlashtirilishi mumkin.

Avvalo, differensialning operatorli modeli sifatida quyidagi ifoda asosiy natija sifatida olindi:

$$\Theta(f, t_0) = \text{cl} \left( \left\{ \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} : t \rightarrow t_0 \right\} \right)$$

Mazkur operator funksiyaning  $t_0$  nuqtadagi barcha mumkin bo'lgan limit nisbatlarini jamlaydi. Agar bu to'plam yagona elementdan iborat bo'lsa, u holda differensial mavjud bo'ladi:

$$\Theta(f, t_0) = \{f'(t_0)\}$$

Bu natija differensialni limitning klassik ta'rifidan tashqari, topologik yopilma orqali aniqlash imkonini beradi va u yangi operatorli yondashuvni ifodalaydi.

Tadqiqot davomida differensial operatorning topologik xossalari ham aniqlashtirildi. Xususan, quyidagi inklyuziya o'rinli ekanligi ko'rsatildi:

$$D(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(D(A))$$

Bu natija differensial operatorning yopilma bilan muvofiqligini ko'rsatadi va u differensiallanuvchan funksiyalarning barqarorligini tavsiflaydi.

**Teorema (Operatorli differensiallanuvchanlik mezon):** Agar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funksiya uchun har bir  $t_0$  da

$$\Theta(f, t_0) = \{v_0\}$$

bo'lsa, u holda  $f$  differensiallanuvchi va  $f'(t_0) = v_0$ .

Bu teorema differensial mavjudligini operatorli to'plam orqali aniqlash imkonini beradi va klassik limit ta'rifini umumlashtiradi.

Natijalarda yana bir muhim bog'lanish aniqlandi. Agar  $f$  differensiallanuvchi bo'lsa, u holda quyidagi lokal linearlashtirish o'rinli:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

va bu ifoda operatorli model orqali quyidagicha talqin qilinadi:

$$\Theta(f, t_0) = \text{cl}(\{f'(t_0)\})$$

Bu esa differensialni funksiyaning lokal chiziqli invariant xossasi sifatida ko'rsatadi.

Topologik invariantlar bo'yicha olingan natijalar ham muhim ahamiyatga ega. Agar  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gomeomorfizm bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$\Theta(f \circ h, t_0) = \Theta(f, h(t_0)) \cdot Dh(t_0)$$

Bu natija differensial xossalarning kompozitsiya ostida qanday transformatsiyalanishini ko'rsatadi va invariantlikni tavsiflaydi.

Vektor funksiyalar uchun Jacobian operatori orqali quyidagi natija umumlashtirildi:

$$J_f(t_0) = Df(t_0)$$

ya'ni Jacobian differensial operator bilan ekvivalent ekanligi ko'rsatildi. Bu esa funksiyaning lokal o'zgarish tezligini yagona operator orqali ifodalash imkonini beradi.

Natijalarda differensial va uzluksizlik o'rtasidagi bog'lanish ham aniqlashtirildi:

$$f \text{ differensiallanuvchi} \Rightarrow f \text{ uzluksiz}$$

va bu quyidagi operatorli shart orqali ifodalandi:

$$f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$$

Bu natija differensiallanuvchanlikning uzluksizlikni ta'minlashini yana bir bor tasdiqlaydi.

Shuningdek, funksiyaning ekstremal nuqtalarini aniqlash uchun quyidagi shartdan foydalanildi:

$$f'(t_0) = 0$$

va operatorli modelda bu quyidagicha ifodalanadi:

$$0 \in \Theta(f, t_0)$$

Bu esa ekstremumlarni topishda operatorli yondashuvni qo'llash imkonini beradi.

Umuman olganda, olingan natijalar differensial analizni operatorli yondashuv asosida chuqurlashtirish, differensial tushunchani umumlashtirish va topologik invariantlar orqali tavsiflash mumkinligini ko'rsatdi. Ishlab chiqilgan model klassik analiz, topologiya va funksional analiz o'rtasida bog'lovchi ko'prik vazifasini bajaradi hamda murakkab funksiyalarni o'rganishda samarali vosita sifatida xizmat qiladi.

### **Muhokama**

Olingan natijalar skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalarini operatorli yondashuv asosida o'rganish klassik analizga nisbatan yanada umumlashgan va konseptual jihatdan chuqurroq ekanligini ko'rsatdi. An'anaviy yondashuvda hosila limit orqali aniqlanadi va u nuqtaviy xarakterga ega bo'ladi, biroq operatorli model bu tushunchani to'plamlar va ularning yopilmalari orqali ifodalash imkonini beradi. Bu esa differensial tushunchaning topologik mazmunini ochib beradi.

Muhokama jarayonida differensialning operatorli modeli

$$\Theta(f, t_0) = \text{cl} \left( \left\{ \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} : t \rightarrow t_0 \right\} \right)$$

asosiy nazariy vosita sifatida qaraldi. Ushbu operator funksiyaning barcha mumkin bo'lgan “yaqinlashuv tezliklari”ni o'z ichiga oladi. Agar bu to'plam yagona elementdan iborat bo'lsa, differensial mavjud bo'ladi. Bu esa hosilani faqat bitta limit qiymat emas, balki limitlar to'plamining degeneratsiyalangan holati sifatida talqin qilish imkonini beradi.

Natijalardan ko'rinadiki, differensial tushunchasi aslida lokal invariant sifatida qaralishi mumkin. Ya'ni, agar

$$\Theta(f, t_0) = \{f'(t_0)\}$$

bo'lsa, bu qiymat funksiyaning  $t_0$  atrofida barcha lokal xatti-harakatini ifodalaydi va kichik o'zgarishlarga nisbatan barqaror bo'ladi. Shu sababli hosila topologik invariantlarga yaqin tushuncha sifatida talqin qilinadi.

Muhokama davomida differensial operatorning yopilma bilan bog'lanishi ham muhim ahamiyat kasb etdi:

$$D(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(D(A))$$

Bu natija differensial operatorning “limitga moslashuvchanligi”ni ko'rsatadi, ya'ni yaqinlashuvchi argumentlar ostida hosila ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu esa differensial analizning barqarorligini tavsiflaydi.

Topologik invariantlar nuqtai nazaridan qaraganda, differensial xossalar homeomorfik o'zgarishlar ostida qisman saqlanadi. Agar huzluksiz va teskari uzluksiz akslantirish bo'lsa, u holda:

$$\Theta(f \circ h, t_0) = \Theta(f, h(t_0)) \cdot Dh(t_0)$$

Bu formula differensialning transformatsiya qonunini ifodalaydi va u differensial xossalarning invariantlik darajasini ko'rsatadi. Demak, hosila qiymati o'zgarishi mumkin, lekin uning strukturaviy xususiyatlari saqlanadi.

Vektor funksiyalar uchun olingan natijalar differensialni Jacobian operatori orqali ifodalashning qulayligini tasdiqladi. Bu esa funksiyaning lokal xatti-harakatini chiziqli operator

sifatida talqin qilish imkonini beradi. Natijada differensial analiz funksional analiz bilan bevosita bog‘lanadi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - differensial va uzluksizlik o‘rtasidagi bog‘lanishdir. Ma’lumki,  $f$  differensiallanuvchi  $\Rightarrow f$  uzluksiz operatorli modelda bu quyidagicha ifodalanadi:  $f(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(f(A))$ . Bu esa differensiallanuvchanlikning kuchliroq xossa ekanligini ko‘rsatadi.

Operatorli yondashuvning yana bir afzalligi shundaki, u ekstremal nuqtalarni aniqlashda ham qo‘llanilishi mumkin. Agar  $0 \in \Theta(f, t_0)$  bo‘lsa, bu nuqta potensial ekstremum sifatida qaraladi. Bu esa klassik  $f'(t_0) = 0$  shartning operatorli umumlashmasi hisoblanadi.

Muhokama davomida operatorli modelning universalligi ham ta’kidlandi. Ushbu yondashuv nafaqat oddiy funksiyalar, balki murakkab, noaniq yoki hatto differensiallanuvchi bo‘lmagan funksiyalarni ham o‘rganish imkonini beradi. Chunki  $\Theta(f, t_0)$  har doim aniqlangan bo‘lib, u differensial mavjud bo‘lmagan holatlarda ham foydali ma’lumot beradi.

Shu bilan birga, ushbu modelning ayrim cheklovlari ham mavjud. Masalan, u differensialning aniq qiymatini emas, balki mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plamini beradi. Bu esa qo‘shimcha analiz talab qilishi mumkin. Shuningdek, invariantlik faqat ma’lum transformatsiyalar uchun o‘rinli bo‘lib, differensialning o‘zi to‘liq invariant emas.

Amaliy nuqtai nazardan qaraganda, olingan natijalar differensial tenglamalar, optimallashtirish va fizik modellashtirishda qo‘llanilishi mumkin. Masalan, trayektoriyalarni tahlil qilishda hosilaning mavjudligi va uning invariant xossalari tizimning barqarorligini aniqlashda muhim rol o‘ynaydi.

Umuman olganda, muhokama natijalari differensial analizni operatorli va topologik yondashuv asosida o‘rganish matematikani yangi darajaga olib chiqishini ko‘rsatdi. Bu yondashuv klassik metodlarni umumlashtiradi, yangi nazariy natijalar beradi va amaliy qo‘llanishlar uchun mustahkam asos yaratadi.

### **Xulosa**

Mazkur tadqiqotda Evklid fazosida aniqlangan skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensial xossalari operatorli yondashuv asosida tizimli ravishda o‘rganildi va ularning topologik invariantlari aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, differensial tushunchasi klassik limit orqali aniqlanishi bilan bir qatorda, topologik operatorlar yordamida yanada umumiy va chuqurroq talqin qilinishi mumkin.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari differensial analizni operatorli va topologik yondashuv asosida o‘rganish samarali va istiqbolli ilmiy yo‘nalish ekanligini tasdiqladi. Ushbu yondashuv matematik nazariyani chuqurlashtirish, yangi invariantlarni aniqlash va amaliy modellashtirish masalalarida qo‘llash uchun keng imkoniyatlar yaratadi.

### **Adabiyotlar, References, Литературы:**

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole.
2. Kuratowski, K. (1968). *Topology, Volume II*. Academic Press.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of

pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo.  
<https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>

5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiri. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

6. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.

7. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

8. Abdiqayumov, A., & Mahmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.