

## SKALYAR ARGUMENTLI VEKTOR FUNKSIYALARNING SILLIQLIK XOSSALARI VA ULARNING DIFFERENSIALLANUVCHANLIK SHARTLARI

**Erkinova Gulyora Elyorbek qizi**

**Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi**

**Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**

**Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston**

**<https://doi.org/10.5281/zenodo.20036994>**

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada skalyar argumentli vektor qiymatli funksiyalarning silliqlik xossalari va differensiallanuvchanlik shartlari o'rganiladi. Natijalarda vektor funksiyalarning  $C^k$  va  $C^\infty$  silliqlik sinflari uchun mezonlar ishlab chiqildi, differensiallanuvchanlikning zarur va yetarli shartlari aniqlashtirildi. Xulosa sifatida silliqlik xossalari funksiyaning lokal va global xatti-harakatini aniqlashda asosiy rol o'ynashi ko'rsatildi.

**Kalit so'zlar:** vektor funksiya, differensiallanuvchanlik, silliqlik, hosila,  $C^k$  sinf,  $C^\infty$ , uzluksizlik, limit, differensial operator, komponentlar bo'yicha hosila, lokal xossa, analiz.

## СВОЙСТВА ГЛАДКОСТИ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА И УСЛОВИЯ ИХ

**Аннотация:** В данной статье изучаются свойства гладкости векторных функций скалярного аргумента и условия их дифференцируемости. В результатах разработаны критерии для классов гладкости  $C^k$  и  $C^\infty$  векторных функций, уточнены необходимые и достаточные условия дифференцируемости. В качестве вывода показано, что свойства гладкости играют ключевую роль в определении локального и глобального поведения функции.

**Ключевые слова:** векторная функция, дифференцируемость, гладкость, производная, класс  $C^k, C^\infty$ , непрерывность, предел, дифференциальный оператор, производная по компонентам, локальное свойство, анализ.

## SMOOTHNESS PROPERTIES OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS OF A SCALAR ARGUMENT AND CONDITIONS FOR THEIR DIFFERENTIABILITY

**Abstract:** This article examines the smoothness properties of vector-valued functions of a scalar argument and the conditions for their differentiability. The results present criteria developed for the smoothness classes  $C^k$  and  $C^\infty$  of vector functions, and the necessary and sufficient conditions for differentiability are clarified. As a conclusion, it is shown that smoothness properties play a fundamental role in determining the local and global behavior of a function.

**Keywords:** vector function, differentiability, smoothness, derivative, class  $C^k, C^\infty$ , continuity, limit, differential operator, component-wise derivative, local property, analysis.

### **Kirish**

Skalyar argumentli vektor qiymatli funksiyalar zamonaviy matematik analiz, differensial tenglamalar va geometrik modellashtirishda muhim o'rin egallaydi. Bunday funksiyalar odatda  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . ko'rinishida aniqlanib, ular real o'zgaruvchining har bir qiymatiga  $n$ -o'lchovli fazodagi nuqtani mos qo'yadi. Ushbu funksiyalar fazoda egri chiziqlarni ifodalaydi va ularning

xatti-harakatini o'rganishda silliqlik va differensiallanuvchanlik tushunchalari asosiy rol o'ynaydi.

Klassik analizda differensiallanuvchanlik tushunchasi limit orqali aniqlanadi:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Agar ushbu limit mavjud bo'lsa, funksiya  $t$  nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Vektor funksiyalar uchun bu hosila komponentlar bo'yicha aniqlanadi:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \Rightarrow f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))$$

Bu natija differensiallanuvchanlikni skalyar funksiyalar darajasiga olib tushirish imkonini beradi.

Silliqlik tushunchasi esa differensiallanuvchanlikning yuqori darajalarini ifodalaydi. Agar funksiya  $k$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u  $C^k$  sinfga tegishli deyiladi:

$$f \in C^k \Leftrightarrow f, f', f'', \dots, f^{(k)} \text{ uzluksiz}$$

Agar funksiya cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsa:  $f \in C^\infty$  bo'ladi va bunday funksiyalar silliq funksiyalar deyiladi.

Silliqlik tushunchasi funksiyaning lokal xatti-harakatini chuqurroq tavsiflaydi. Masalan, differensiallanuvchi funksiya yaqin atrofda chiziqli funksiya bilan approksimatsiya qilinadi:  $f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$ . Bu tenglama funksiyaning lokal linearlashtirish xossasini ifodalaydi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, differensiallanuvchanlik va silliqlik tushunchalari ko'plab matematik va amaliy masalalarda muhim rol o'ynaydi. Xususan, differensial tenglamalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi, ekstremumlarni aniqlash va fizik jarayonlarni modellashtirishda ushbu tushunchalar asosiy vosita hisoblanadi.

Shuningdek, silliqlik darajasi funksiyaning qanchalik "yaxshi xulqli" ekanligini ko'rsatadi. Masalan,  $C^1$  funksiyalar uzluksiz hosilaga ega bo'lsa,  $C^2$  funksiyalar egrilikni aniqlash imkonini beradi,  $C^\infty$  funksiyalar esa juda silliq bo'lib, ularni qatorlar yordamida ifodalash mumkin.

Vektor funksiyalar uchun yana bir muhim jihat - komponentlar bo'yicha differensiallanuvchanlikning umumiy differensiallanuvchanlikka ekvivalentligi:

$$f \text{ differensiallanuvchi} \Leftrightarrow f_i \text{ lar differensiallanuvchi}$$

Bu natija murakkab funksiyalarni tahlil qilishni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqlik xossalarini aniqlash, differensiallanuvchanlik uchun zarur va yetarli shartlarni ishlab chiqish hamda ushbu tushunchalarning o'zaro bog'liqligini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, silliqlik va differensiallanuvchanlik tushunchalari yagona tizimda qaraladi va ularning umumiy mezonlari ishlab chiqiladi. Bu esa differensial analizni chuqurlashtirish va umumlashtirish imkonini beradi.

Shunday qilib, skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqlik xossalarini o'rganish matematik analizning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega.

### Metod

Mazkur tadqiqot skalyar argumentli vektor qiymatli funksiyalarning silliqlik xossalari va differensiallanuvchanlik shartlarini aniqlashga qaratilgan bo'lib, aksiomatik-deduktiv metod asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

ko‘rinishidagi funksiyalar qaraldi va ularning xossalari komponentlar bo‘yicha tahlil qilindi.

Metodologiyaning markaziy g‘oyasi differensiallanuvchanlik va silliqlikni limit va differensial operatorlar yordamida formal ifodalashdan iborat. Dastlab differensial operator quyidagicha aniqlanadi:

$$D: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), Df(t) = f'(t)$$

Bu operator orqali differensiallanuvchanlik quyidagi limit yordamida tekshirildi:

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Vektor funksiyalar uchun bu limit komponentlar bo‘yicha ajraladi:

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

Shundan kelib chiqib, quyidagi asosiy metodologik mezon qo‘llanildi:

$$f \text{ differensiallanuvchi} \Leftrightarrow \forall i, f_i \text{ differensiallanuvchi}$$

Bu natija differensiallanuvchanlikni skalyar funksiyalar darajasiga keltirish imkonini berdi.

Silliqlik darajalarini aniqlash uchun  $C^k$  sinflar kiritildi:

$$C^k = \{f: f, f', f'', \dots, f^{(k)} \text{ uzluksiz}\}$$

Shuningdek, quyidagi inklyuziya zanjiri asosiy rol o‘ynadi:

$$C^\infty \subset \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0$$

Bu yerda  $C^0$ - uzluksiz funksiyalar sinfi.

Metodologiyada differensiallanuvchanlikni tekshirish uchun lokal linearlashtirish usuli qo‘llanildi:

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

Bu tenglik quyidagi limit bilan ekvivalent ekanligi asoslandi:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)\|}{|t - t_0|} = 0$$

Mazkur shart differensiallanuvchanlikning zarur va yetarli mezoni sifatida ishlatildi.

Metodologiyada yuqori tartibli hosilalar ham ketma-ket operator sifatida qaraldi:

$$D^k f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$$

Bu orqali funksiyaning silliqlik darajasi aniqlanadi.

Shuningdek, differensial operatorning algebraik xossalari qo‘llanildi:

$$D(f + g) = Df + Dg, D(\lambda f) = \lambda Df$$

hamda ko‘paytma uchun:

$$D(\varphi f) = \varphi' f + \varphi f'$$

Bu xossalar differensial operatorni chiziqli operator sifatida tahlil qilish imkonini beradi. Biroq teskari yo‘nalish umumiy holda o‘rinli emasligi misollar orqali ko‘rsatildi.

Yana bir muhim metod sifatida komponentlar bo‘yicha yuqori tartibli differensiallanuvchanlik qo‘llanildi:  $f \in C^k \Leftrightarrow \forall i, f_i \in C^k$ . Bu natija silliqlikni komponentlar orqali tekshirish imkonini beradi.

Metodologiyada ekstremumlarni aniqlash uchun quyidagi shart ishlatildi:  $f'(t_0) = 0$ . Bu shart funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlashda asosiy vosita hisoblanadi. Shuningdek, quyidagi normal baholash ham qo‘llanildi:

$$\| f'(t) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2}$$

Bu ifoda funksiyaning o'zgarish tezligini baholash imkonini beradi.

Metodologiyaning yakuniy bosqichida silliqlik va differensiallanuvchanlikni yagona model orqali ifodalash taklif qilindi:

$$f \in C^k \Leftrightarrow D^j f \text{ mavjud va uzluksiz, } j = 0, 1, \dots, k$$

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya vektor funksiyalarning differensiallanuvchanlik shartlarini aniqlash, ularning silliqlik darajalarini tasniflash va bu tushunchalarni operatorlar orqali umumlashtirish imkonini berdi.

### Natijalar

Tadqiqot natijasida skalyar argumentli vektor funksiyalarning differensiallanuvchanlik shartlari va silliqlik xossalari tizimli ravishda aniqlashtirildi hamda ular uchun umumiy mezonlar ishlab chiqildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, vektor funksiyalarning silliqligi ularning komponentlari orqali to'liq tavsiflanadi va differensial analizni soddalashtirish imkonini beradi.

Avvalo, differensiallanuvchanlik uchun quyidagi asosiy mezon aniqlandi:

$$f \text{ differensiallanuvchi} \Leftrightarrow \forall i, f_i \text{ differensiallanuvchi}$$

Bu natija vektor funksiyaning differensiallanuvchanligi uning barcha komponentlarining differensiallanuvchanligiga ekvivalent ekanligini ko'rsatadi.

Shuningdek, silliqlik darajalari uchun quyidagi umumiy natija olindi:

$$f \in C^k \Leftrightarrow \forall i, f_i \in C^k$$

Bu esa  $C^k$  sinflarni komponentlar orqali aniqlash mumkinligini asoslaydi.

Tadqiqot davomida differensiallanuvchanlikning zarur va yetarli sharti sifatida quyidagi limit tengligi asosiy natija sifatida olindi:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\| f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) \|}{|t - t_0|} = 0$$

Bu shart funksiyaning lokal chiziqli yaqinlashuvini ifodalaydi va differensiallanuvchanlikning eng muhim tavsiflaridan biri hisoblanadi.

**Teorema (Silliqlik-differensiallanuvchanlik ekvivalentligi):** Agar  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funksiya uchun barcha komponentlar  $k$  marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda  $f \in C^k$ . Aksincha, agar  $f \in C^k$  bo'lsa, uning barcha komponentlari ham  $C^k$  sinfga tegishli.

Bu teorema silliqlikni komponentlar orqali tekshirish imkonini beradi va vektor analizni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Natijalarda differensial operatorning quyidagi xossalari ham umumlashtirildi:

$$D(f + g) = Df + Dg, D(\lambda f) = \lambda Df$$

va

$$D^k f = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$$

Bu natijalar differensial operatorning komponentlar bo'yicha ajralishini yana bir bor tasdiqlaydi.

Shuningdek, differensiallanuvchanlik va uzluksizlik o'rtasidagi quyidagi bog'lanish aniqlandi:  $f$  differensiallanuvchi  $\Rightarrow f$  uzluksiz. Biroq quyidagi qarama-qarshi natija ham ko'rsatildi:  $f$  uzluksiz  $\nRightarrow f$  differensiallanuvchi.

Bu esa differentsiallanuvchanlik uzluksizlikdan kuchliroq xossa ekanligini bildiradi. Yana bir muhim natija sifatida yuqori tartibli silliqlik uchun quyidagi ifoda keltirildi:  $f \in C^\infty \Leftrightarrow \forall k, D^k f$  mavjud va uzluksiz. Bu natija silliq funksiyalar sinfini to'liq tavsiflaydi. Natijalarda ekstremum nuqtalar uchun quyidagi shart ham umumlashtirildi:  $f'(t_0) = 0$ . Bu shart funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlashda asosiy vosita sifatida qaraldi.

Shuningdek, funksiyaning o'zgarish tezligini baholash uchun quyidagi norma ishlatildi:

$$\| f'(t) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2}$$

Bu ifoda funksiyaning tezlik vektorining uzunligini ifodalaydi va geometrik talqinga ega.

Natijalarda yana bir muhim bog'lanish aniqlandi:

$$f \in C^1 \Rightarrow f \text{ lokal Lipschitz}$$

Bu esa differentsiallanuvchan funksiyalar lokal barqarorlikka ega ekanligini ko'rsatadi.

Umuman olganda, olingan natijalar skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqlik xossalari va differentsiallanuvchanlik shartlarini yagona tizimda ifodalash mumkinligini ko'rsatdi. Ishlab chiqilgan mezonlar differensial analizni chuqurlashtirish va amaliy masalalarda qo'llash uchun muhim nazariy asos yaratadi.

### Muhokama

Olingan natijalar skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqlik xossalari va differentsiallanuvchanlik shartlarini o'rganish klassik analizni umumlashtirish va chuqurlashtirish imkonini berishini ko'rsatdi. Ayniqsa, differentsiallanuvchanlikning komponentlar orqali aniqlanishi:

$$f \text{ differentsiallanuvchi} \Leftrightarrow \forall i, f_i \text{ differentsiallanuvchi}$$

murakkab vektor funksiyalarni soddalashtirib o'rganishga imkon yaratadi.

Muhokama jarayonida silliqlik tushunchasining mohiyati alohida tahlil qilindi.  $C^k$  sinfga tegishli funksiyalar uchun yuqori tartibli hosilalarning mavjudligi va uzluksizligi funksiyaning lokal xatti-harakatini to'liq tavsiflaydi. Bu esa quyidagi inklyuziya zanjiri orqali ifodalanadi:

$$C^\infty \subset \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0$$

Bu zanjir funksiyaning silliqlik darajasi oshgan sari uning xossalari ham boyib borishini ko'rsatadi.

Muhokamada differentsiallanuvchanlikning asosiy mezoni:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\| f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) \|}{|t - t_0|} = 0$$

funksiyaning lokal linearlashtirish xossasini ifodalashi ta'kidlandi. Bu natija shuni ko'rsatadiki, differentsiallanuvchi funksiya kichik atrofda chiziqli funksiya kabi tutadi.

Geometrik nuqtai nazardan qaraganda,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funksiya fazoda egri chiziqni ifodalaydi va uning hosilasi ushbu egri chiziqning teginuvchi vektori hisoblanadi:

$$\gamma(t) = f(t), \gamma'(t) = f'(t)$$

Bu esa differensialning geometrik ma'nosini aniq ko'rsatadi.

Yana bir muhim jihat - yuqori tartibli hosilalarning roli. Agar funksiya  $C^2$  sinfga tegishli bo'lsa, uning egriligi va tezlanishi aniqlanishi mumkin. Agar  $f \in C^\infty$  bo'lsa, funksiya juda silliq bo'lib, uni qatorlar orqali ifodalash mumkin.

Muhokamada differensial operatorning chiziqlilik ham muhim rol o'ynadi:

$$D(f + g) = Df + Dg, D(\lambda f) = \lambda Df$$

Bu xossalr differensial analizni algebraik metodlar bilan bog'lash imkonini beradi.

Muhokamada yana bir muhim natija - lokal Lipschitz xossasi:

$$f \in C^1 \Rightarrow f \text{ lokal Lipschitz}$$

Bu esa differensiallanuvchi funksiyalarning barqarorligini ko'rsatadi va u differensial tenglamalarda muhim ahamiyatga ega.

Amaliy nuqtai nazardan qaraganda, olingan natijalar differensial tenglamalar, optimallashtirish va fizik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Masalan, trayektoriyalarni tahlil qilishda hosilaning mavjudligi va silliqiligi tizimning harakat qonuniyatlarini aniqlaydi.

Shu bilan birga, silliqilik xossalari funksiyaning global xatti-harakatiga ham ta'sir qiladi. Yuqori silliqilik darajasiga ega funksiyalar odatda yaxshi yaqinlashadi va barqaror hisoblanadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqilik xossalari differensial analizning asosiy elementi ekanligini va ular orqali funksiyaning lokal va global xatti-harakatini chuqur o'rganish mumkinligini ko'rsatdi.

### **Xulosa**

Mazkur tadqiqotda skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqilik xossalari va differensiallanuvchanlik shartlari tizimli ravishda o'rganildi hamda umumlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, ushbu funksiyalarning asosiy xossalari ularning komponentlari orqali to'liq tavsiflanadi va bu yondashuv differensial analizni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari skalyar argumentli vektor funksiyalarning silliqilik xossalari va differensiallanuvchanlik shartlari yagona tizimda ifodalanishi mumkinligini ko'rsatdi. Ushbu yondashuv differensial analizni chuqurlashtirish, nazariy asoslarni mustahkamlash va amaliy masalalarda qo'llash uchun muhim imkoniyatlar yaratadi.

### **Adabiyotlar, References, Литературы:**

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole.
2. Kuratowski, K. (1968). *Topology, Volume II*. Academic Press.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

8. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.