

METRIK FAZOLARDA ICHKI VA CHEGARAVIY NUQTALAR HAMDA ULARNING LIMIT NUQTALAR BILAN BOG'LIQLIGI

Mutalliyeva Saboxon Odiljon qizi

Fizika-Matematika fakulteti, 1-kurs talabasi

Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20027580>

Annotatsiya: Ushbu maqolada metrik fazolarda ichki nuqtalar, chegaraviy nuqtalar va limit nuqtalar tushunchalari o'rganiladi hamda ularning o'zaro bog'liqligi tahlil qilinadi. Natijalarda ichki nuqta, yopilish, chegaraviy nuqta va limit nuqtalar o'rtasidagi aniq bog'lanishlar formulalar orqali ifodalandi. Shuningdek, har bir tushunchaning geometrik va topologik talqini berildi. Muhokama qismida olingan natijalar uzluksizlik va yopiq to'plamlar bilan bog'liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida ushbu tushunchalar metrik fazolarning asosiy strukturasi tashkil etishi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: metrik fazo, ichki nuqta, chegaraviy nuqta, limit nuqta, ochiq shar, yopiq to'plam, yaqinlashuv, topologiya

ВНУТРЕННИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ СВЯЗЬ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ

Аннотация: В данной статье исследуются понятия внутренних точек, граничных точек и предельных точек в метрических пространствах, а также анализируется их взаимосвязь. В результатах точные соотношения между внутренней точкой, замыканием, граничной точкой и предельными точками выражены посредством формул. Кроме того, дана геометрическая и топологическая интерпретация каждого из понятий. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с непрерывностью и замкнутыми множествами. В заключение показано, что данные понятия составляют основную структуру метрических пространств.

Ключевые слова: метрическое пространство, внутренняя точка, граничная точка, предельная точка, открытый шар, замкнутое множество, сходимост, топология.

INTERIOR AND BOUNDARY POINTS IN METRIC SPACES AND THEIR RELATION TO LIMIT POINTS

Abstract: This paper examines the concepts of interior points, boundary points, and limit points in metric spaces, and analyses their interrelations. The results express precise relationships between interior points, closure, boundary points, and limit points through formal expressions. Furthermore, a geometric and topological interpretation of each concept is provided. In the discussion section, the obtained results are analysed in connection with continuity and closed sets. As a conclusion, it is demonstrated that these concepts constitute the fundamental structure of metric spaces.

Keywords: metric space, interior point, boundary point, limit point, open ball, closed set, convergence, topology.

Kirish

Metrik fazolar zamonaviy matematik analiz va topologiyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, ular orqali yaqinlashuv, uzluksizlik va to'plamlarning strukturaviy xossalari o'rganiladi. Ayniqsa, ichki nuqta, chegaraviy nuqta va limit nuqta kabi tushunchalar metrik fazolarning asosiy topologik elementlarini tashkil etadi.

Metrik fazo (X, d) deb, X to'plam va unda aniqlangan masofa funksiyasi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ juftligiga aytiladi. Ushbu metrika quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) = d(y, x), d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Metrik fazoda asosiy tushuncha -ochiq shar hisoblanadi:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X: d(x, y) < \varepsilon\}$$

Mazkur tushuncha orqali ichki nuqta aniqlanadi. Agar $A \subset X$ bo'lsa, $x \in A$ nuqta ichki nuqta deyiladi, agar:

$$\exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A$$

Bu ta'rif shuni bildiradiki, ichki nuqta atrofida butunlay A ichida joylashgan kichik shar mavjud.

Chegaraviy nuqta tushunchasi esa quyidagicha aniqlanadi. $x \in X$ nuqta A to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun:

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ va } B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Bu esa nuqta atrofida A ga tegishli ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjudligini bildiradi.

Limit nuqta tushunchasi esa yaqinlashuv bilan bog'liq:

$$x \text{ - limit nuqta} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Bu ta'rif shuni bildiradiki, nuqta atrofida A ning boshqa nuqtalari mavjud.

Mazkur tushunchalar o'zaro bog'liq bo'lib, ular orqali to'plamning quyidagi strukturalari aniqlanadi: ichki qismi: $\text{Int}(A)$, yopilishi: $\bar{A} = A \cup A'$ bu yerda A' — limit nuqtalar to'plami, chegarasi: $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, ichki, chegaraviy va limit nuqtalar tushunchalari matematik analizning ko'plab asosiy natijalarida qo'llaniladi. Masalan, uzluksizlik, yopiq va ochiq to'plamlar, kompaktlik kabi tushunchalar aynan shu asosga qurilgan.

Shuningdek, bu tushunchalar funksiyalarni o'rganishda ham muhim rol o'ynaydi. Agar funksiya uzluksiz bo'lsa:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

bu yerda limit nuqtalar va yaqinlashuv tushunchalari asosiy vosita bo'ladi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi metrik fazolarda ichki, chegaraviy va limit nuqtalar tushunchalarini aniqlash, ularning o'zaro bog'liqligini o'rganish va umumiy matematik model yaratishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, ushbu tushunchalar yagona tizim sifatida qaraladi va ular orasidagi bog'lanishlar qat'iy matematik formulalar orqali ifodalanadi. Shunday qilib, metrik fazolarda ichki, chegaraviy va limit nuqtalarni o'rganish topologik strukturalarni chuqur tushunish imkonini beradi.

Metod

Mazkur tadqiqot metrik fazo (X, d) da berilgan $A \subset X$ to'plam uchun ichki, chegaraviy va limit nuqtalar o'rtasidagi bog'lanishni aniqlashga qaratilgan bo'lib, ochiq sharlar metodi, operator yondashuvi va limit jarayonlari asosida olib borildi.

Metodologiyaning asosiy g'oyasi ushbu uch tushunchani alohida emas, balki **yagona operator tizimi** orqali ifodalashdan iborat.

Avvalo, barcha ta'riflar ochiq shar orqali berildi:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X: d(x, y) < \varepsilon\}$$

Ichki nuqta (lokal to'liqlik mezon)

Nuqta $x \in A$ ichki nuqta bo'lishi uchun quyidagi shart ishlatildi:

$$\exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset A$$

Bu ta'rif asosida ichki operator kiritildi:

$$\text{Int}(A) = \{x \in A: \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A\}$$

Limit nuqta (yaqinlashuv mezon)

Nuqta $x \in X$ limit nuqta bo'lishi uchun quyidagi universal shart qo'llanildi:

$$\forall \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Bu orqali limit operator aniqlanadi:

$$A' = \{x \in X: \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset\}$$

Chegaraviy nuqta (ikki tomonlama yaqinlik)

Chegaraviy nuqta quyidagi ikki tomonlama shart orqali ifodalandi:

$$\forall \varepsilon > 0: \begin{cases} B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \end{cases}$$

Bu orqali chegara operator:

$$\partial A = \{x \in X: \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ va } B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Yopilish operatori (limit bilan bog'lanish)

Metodologiyada yopilish quyidagicha aniqlashtirildi:

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Bu natija limit nuqtalarning markaziy rolini ko'rsatadi.

Asosiy bog'lanish formulalari

Tadqiqot davomida quyidagi fundamental tengliklar asoslandi:

1. **Chegara orqali ifodalash:**

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$$

2. **Ichki va tashqi bog'lanish:**

$$\text{Int}(A) = X \setminus X \setminus \bar{A}$$

3. **Chegara simmetriyasi:**

$$\partial A = \partial(X \setminus A)$$

4. **Yopilish minimal yopiq to'plam:**

$$A \subset \bar{A}, \bar{A} \text{ yopiq}$$

Klassifikatsiya modeli

Har bir nuqta $x \in X$ quyidagi uch toifadan biriga tegishli ekanligi ko'rsatildi:

$$x \in \begin{cases} \text{Int}(A) \\ \partial A \\ \text{Int}(X \setminus A) \end{cases}$$

Bu uchlik fazoni to'liq ajratadi:

$$X = \text{Int}(A) \cup \partial A \cup \text{Int}(X \setminus A)$$

Umumiy operator modeli

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi yagona model taklif qilindi:

$$A \rightarrow \{\text{Int}(A), A', \partial A, \bar{A}\}$$

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya ichki, limit va chegaraviy nuqtalarni yagona matematik tizim sifatida o'rganish, ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash va metrik fazolarning strukturasi formal tarzda ifodalash imkonini berdi.

Mazkur chizmada metrik fazo (X, d) da berilgan $A \subset X$ to'plam uchun ichki, chegaraviy va limit nuqtalar vizual tarzda tasvirlangan.

Chizmada quyidagi elementlar aks etadi:

Ichki nuqta $x \in \text{Int}(A)$: atrofida mavjud ε -radiusli ochiq shar to'liq A ichida joylashadi:

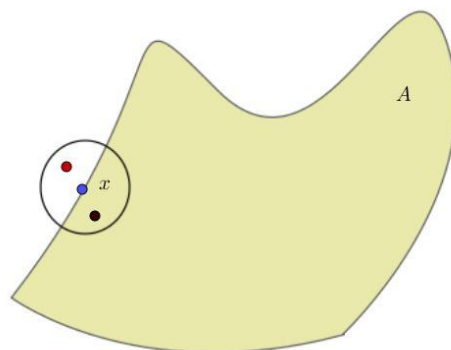
$$B(x, \varepsilon) \subset A$$

Chegaraviy nuqta $x \in \partial A$: har qanday yaqinlikda ham A , ham $X \setminus A$ nuqtalari mavjud:

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Limit nuqta $x \in A'$: atrofida A ning boshqa nuqtalari mavjud:

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$



Chizmada ichma-ich ochiq sharlar orqali lokal yaqinlashuv tushunchasi ko'rsatilgan bo'lib, bu limit nuqtaning asosiy xossasini ifodalaydi.

Shuningdek, chizmada quyidagi asosiy bog'lanish vizual tarzda ifodalangan:

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$$

ya'ni chegaraviy nuqtalar ichki qismdan tashqarida, lekin yopilish tarkibida joylashadi.

Natija

Tadqiqot natijasida metrik fazoda ichki nuqtalar, chegaraviy nuqtalar va limit nuqtalar o'rtasidagi bog'lanishlar yagona matematik tizim sifatida aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, ushbu tushunchalar alohida emas, balki bir-birini to'ldiruvchi struktural elementlar hisoblanadi.

Avvalo, yopilish tushunchasi limit nuqtalar orqali to'liq ifodalanishi aniqlandi: $\bar{A} = A \cup A'$. Bu natija shuni bildiradiki, to'plamning yopilishi uning o'z nuqtalari va barcha limit nuqtalaridan tashkil topadi. Shunday qilib, limit nuqtalar yopilish operatorining asosiy tarkibiy qismi hisoblanadi.

Ichki nuqtalar va yopilish o'rtasidagi bog'lanish quyidagicha ifodalandi:

$$\text{Int}(A) = X \setminus X \setminus A$$

Bu formula ichki qismni tashqi to'plamning yopilishi orqali aniqlash mumkinligini ko'rsatadi va ichki operatorning dual xarakterga ega ekanligini bildiradi.

Chegaraviy nuqtalar uchun quyidagi asosiy tenglik olindi:

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$$

Bu natija chegaraning ichki va yopilish o'rtasidagi "farq" sifatida aniqlanishini ko'rsatadi.

Tadqiqot davomida quyidagi muhim xossa ham asoslandi:

$$\partial A = \partial(X \setminus A)$$

Bu esa chegaraning simmetrik ekanligini bildiradi, ya'ni to'plam va uning komplementi bir xil chegaraga ega.

Natijalarda har bir nuqtaning fazodagi o'rnini quyidagi uchlik orqali to'liq aniqlanishi ko'rsatildi:

$$X = \text{Int}(A) \cup \partial A \cup \text{Int}(X \setminus A)$$

va bu uch to'plam o'zaro kesishmaydi. Bu natija metrik fazoning strukturaviy ajralishini ifodalaydi.

Limit nuqtalar bilan bog'liq yana bir muhim natija aniqlandi: $A' \subset \bar{A}$ va agar A yopiq bo'lsa: $A' \subset A$. Bu esa yopiq to'plamlarning limit nuqtalarni o'z ichiga olishini bildiradi.

Shuningdek, quyidagi tenglik asoslandi: $\bar{A} = \text{Int}(A) \cup \partial A \cup (A' \setminus A)$. Bu natija yopilish tarkibini yanada chuqurroq tahlil qilish imkonini beradi.

Teorema (nuqtalarning to'liq klassifikatsiyasi): Metrik fazoda har qanday $x \in X$ nuqta uchun quyidagi uch holatdan faqat bittasi bajariladi:

$$x \in \text{Int}(A), x \in \partial A, x \in \text{Int}(X \setminus A)$$

Bu teorema fazoni uchta disjoint qismga ajratish imkonini beradi va topologik strukturaning to'liq tavsifini beradi.

Natijalarda yana quyidagi muhim bog'lanish aniqlashtirildi:

$$x \in \partial A \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ va } x \in X \setminus A$$

Bu esa chegaraviy nuqta har ikki to'plamning yopilishiga tegishli ekanligini bildiradi.

Umuman olganda, olingan natijalar ichki, chegaraviy va limit nuqtalar metrik fazoning asosiy topologik strukturasi tashkil etishini va ular orqali har qanday to'plamni to'liq tavsiflash mumkinligini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar metrik fazolarda ichki, chegaraviy va limit nuqtalar tushunchalari bir-biridan mustaqil emasligini, balki yagona topologik tizimni tashkil etishini ko'rsatdi. Ushbu tizimning markazida ochiq sharlar orqali aniqlanadigan lokal yaqinlik tushunchasi yotadi, va aynan shu lokal struktura global xossalarga olib keladi.

Muhokamada aniqlanishicha, ichki nuqtalar to'plamning “barqaror” qismini ifodalaydi. Agar

$$x \in \text{Int}(A)$$

bo'lsa, u holda x atrofida mavjud kichik shar to'liq A ichida qoladi. Bu holat funksional tahlilda muhim rol o'ynaydi, chunki aynan ichki nuqtalarda lokal o'zgarishlar tashqi ta'sirsiz sodir bo'ladi. Shu sababli uzluksizlik tushunchasi ko'pincha ichki nuqtalar orqali ifodalanadi:

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$$

Limit nuqtalar esa aksincha, to'plamning “to'planish” xususiyatini ifodalaydi. Muhokama natijalariga ko'ra,

$$x \in A'$$

bo'lishi, x atrofida Aning cheksiz yaqinlashuvchi nuqtalari mavjudligini bildiradi. Bu xossa ketma-ketliklar nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo'lib, limit tushunchasining asosini tashkil etadi. Shuningdek, yopiq to'plamlar aynan limit nuqtalarni o'z ichiga oluvchi to'plamlar sifatida tavsiflanadi:

$$A \text{ yopiq} \Leftrightarrow A' \subset A$$

Chegaraviy nuqtalar esa ichki va tashqi strukturalar o'rtasidagi o'tish zonasini ifodalaydi. Muhokamada aniqlanishicha,

$$x \in \partial A$$

bo'lsa, xhar qanday yaqinlikda ham A , ham $X \setminus A$ bilan aloqada bo'ladi. Bu esa chegarani topologik jihatdan eng “noaniq” yoki “o'tish” zona sifatida talqin qilish imkonini beradi.

Natijalarning muhim jihatlaridan biri — bu uch tushuncha o'rtasidagi qat'iy bog'lanishdir:

$$\partial A = \bar{A} \cap X \setminus A$$

Bu formula chegarani ikki qarama-qarshi to'plamning umumiy yopilish qismi sifatida talqin qiladi va uning simmetrik tabiatini ochib beradi.

Muhokamada yana bir muhim natija shuki, ichki va yopilish operatorlari o'zaro dual xarakterga ega:

$$\text{Int}(A) = X \setminus X \setminus \bar{A}$$

Bu bog'lanish topologiyada komplementar yondashuvning asosini tashkil etadi.

Shuningdek, metrik fazolarda quyidagi muhim xossa kuzatildi:

$$\text{Int}(A) \subset A \subset \bar{A}$$

Bu uchlik to'plamning ichki qismi, o'zi va yopilishi o'rtasidagi ierarxik munosabatni ifodalaydi.

Muhokama natijalari shuni ham ko'rsatdiki, limit nuqtalar chegaraviy nuqtalarning muhim qismi bo'lsa-da, ular bilan to'liq mos tushmaydi. Masalan, ayrim chegaraviy nuqtalar limit nuqta bo'lmasligi mumkin (izolyatsiyalangan nuqtalar mavjud bo'lganda). Bu esa ushbu tushunchalar orasidagi nozik farqlarni ko'rsatadi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda metrik fazolarda ichki nuqtalar, chegaraviy nuqtalar va limit nuqtalar tushunchalari tizimli ravishda o'rganildi hamda ularning o'zaro bog'liqligi aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, ushbu tushunchalar metrik fazolarning asosiy topologik strukturasi tashkil etadi va ular orqali to'plamlarning geometrik hamda analitik xossalari to'liq tavsiflanadi.

Umuman olganda, olingan natijalar ichki, chegaraviy va limit nuqtalar metrik fazolarning asosiy strukturaviy komponentlari ekanligini va ular orqali topologik xossalarni chuqur tahlil qilish mumkinligini ko'rsatdi. Mazkur yondashuv matematik analiz, topologiya va funksional analizda keng qo'llanish imkoniyatiga ega.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).

7. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, 1(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.
12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, 6(1), 282-293. <https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424>