# UCH O‘LCHOVLI FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKNING O‘ZARO VAZIYATINI ANALITIK TADQIQ ETISH VA UNING GEOMETRIK TALQINI

**Sadriddinova Madina Xusanboy qizi**
**Matematika yo‘nalishi 1-kurs talabasi**
**Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**
**Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O’zbekiston**
**https://doi.org/10.5281/zenodo.19916541**

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyati analitik va geometrik jihatdan o‘rganiladi. Natijalarda yo‘nalish vektori va normal vektor orasidagi munosabatlar orqali chiziq–tekislik holatlari klassifikatsiya qilindi. Shuningdek, kesishish nuqtasini topish va masofani aniqlash formulalari keltirildi. Muhokama qismida ushbu natijalarning fazoviy tasvirlash, muhandislik va kompyuter grafikadagi qo‘llanishi tahlil qilindi. Xulosa sifatida analitik usullar orqali fazoviy geometrik munosabatlarni to‘liq tavsiflash mumkinligi ko‘rsatildi.

**Kalit so‘zlar:** fazoviy geometriya, to‘g‘ri chiziq, tekislik, parametrik tenglama, normal vektor, skalyar ko‘paytma, kesishish, parallel holat, masofa.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

**Аннотация:** В данной статье аналитически и геометрически исследуется взаимное расположение прямой и плоскости в трёхмерном пространстве. В результатах случаи взаимного расположения прямой и плоскости классифицированы посредством соотношений между направляющим вектором и нормальным вектором. Кроме того, приведены формулы нахождения точки пересечения и определения расстояния. В разделе обсуждения проанализировано применение данных результатов в пространственном изображении, инженерии и компьютерной графике. В заключение показано, что аналитические методы позволяют дать полное описание пространственных геометрических отношений.

**Ключевые слова:** пространственная геометрия, прямая линия, плоскость, параметрическое уравнение, нормальный вектор, скалярное произведение, пересечение, параллельное положение, расстояние.

# ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE MUTUAL POSITION OF A LINE AND A PLANE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE AND ITS GEOMETRIC INTERPRETATION

**Abstract:** This paper investigates analytically and geometrically the mutual position of a line and a plane in three-dimensional space. The results classify the cases of the mutual position of a line and a plane through the relationships between the direction vector and the normal vector. Furthermore, formulas for finding the point of intersection and determining the distance are presented. In the discussion section, the application of these results in spatial representation, engineering, and computer graphics is analysed. As a conclusion, it is demonstrated that analytical methods enable a complete description of spatial geometric relationships.

**Keywords:** spatial geometry, straight line, plane, parametric equation, normal vector, scalar product, intersection, parallel position, distance.

**Kirish**

Uch o‘lchovli fazoda geometrik obyektlar o‘rtasidagi munosabatlarni o‘rganish analitik geometriyaning muhim yo‘nalishlaridan biridir. Ayniqsa, to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini aniqlash fazoviy modellashtirish, muhandislik hisob-kitoblari va kompyuter grafikada keng qo‘llaniladi.

Fazoda to‘g‘ri chiziq odatda parametrik tenglama orqali beriladi:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

yoki vektor ko‘rinishda:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

bu yerda $\mathbf{v} = (a, b, c)$- yo‘nalish vektori.

Tekislik esa umumiy tenglama orqali ifodalanadi:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

yoki vektor ko‘rinishda:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

bu yerda $\mathbf{n} = (A, B, C)$- tekislikning normal vektori.

Chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini aniqlashda asosiy rolni yo‘nalish vektori $\mathbf{v}$va normal vektor $\mathbf{n}$o‘rtasidagi munosabat o‘ynaydi:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

Quyidagi holatlar mavjud:

**Kesishuvchi holat:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$$

**Parallel holat:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$$

**Chiziq tekislikda yotadi:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{va} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Kesishish nuqtasini aniqlash uchun parametrik tenglamalar tekislik tenglamasiga qo‘yiladi:

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$$

Bu tenglamadan $t$ topilib, kesishish nuqtasi aniqlanadi.

Chiziqdan tekislikkacha masofa quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$d = \frac{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, fazoviy obyektlarning o‘zaro joylashuvi muhandislik, arxitektura va kompyuter grafikada muhim ahamiyatga ega. Analitik usullar yordamida bu munosabatlarni aniq va samarali aniqlash mumkin.

Shuningdek, ushbu masala geometrik talqin bilan boyitilganda fazoviy tasavvur yanada chuqurlashadi. Bu esa nazariy bilimlarni amaliy qo‘llashda muhim ahamiyatga ega. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini analitik usullar yordamida o‘rganish va uning geometrik talqinini berishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, analitik va geometrik yondashuvlar birlashtirilib, yagona tizim sifatida qaraladi.

Shunday qilib, fazoviy analitik geometriya chiziq va tekislikning o‘zaro munosabatlarini chuqur va aniq o‘rganish imkonini beradi.

**Metod**

Mazkur tadqiqot uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, vektor analiz, parametrik tenglamalar, skalyar ko‘paytma va algebraik tenglamalar sistemalari asosida olib borildi. Asosiy obyektlar sifatida fazodagi chiziq va tekislik qaraldi.

To‘g‘ri chiziq quyidagi parametrik tenglama orqali berildi:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

bu yerda $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$- chiziqdagi nuqta, $\mathbf{v} = (a, b, c)$- yo‘nalish vektori.

Tekislik esa quyidagi umumiy tenglama bilan ifodalandi:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

yoki vektor ko‘rinishda:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0$$

bu yerda $\mathbf{n} = (A, B, C)$- normal vektor.

Metodologiyaning asosiy g‘oyasi chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini $\mathbf{v}$va $\mathbf{n}$vektorlar orqali aniqlashdan iborat bo‘ldi.

Avvalo, quyidagi skalyar ko‘paytma hisoblandi:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

Bu ifoda orqali quyidagi holatlar ajratildi: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$→ chiziq tekislikni kesadi,

$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$→ chiziq tekislikka parallel.

Parallel holatda qo‘shimcha shart tekshirildi:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

Agar bu ifoda nolga teng bo‘lsa:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

u holda chiziq tekislikda yotadi.

Aks holda:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

chiziq tekislikka parallel, lekin kesishmaydi.

Kesishish nuqtasini aniqlash uchun parametrik tenglamalar tekislik tenglamasiga qo‘yildi:

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$$

Bu tenglama quyidagicha yechildi:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}$$

Topilgan $t$qiymati chiziq tenglamasiga qo‘yilib, kesishish nuqtasi aniqlanadi.

Metodologiyada masofa tushunchasi ham o‘rganildi. Agar chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bu formula nuqtadan tekislikkacha masofa formulasiga asoslangan.

Shuningdek, metodologiyada quyidagi umumiy model shakllantirildi:

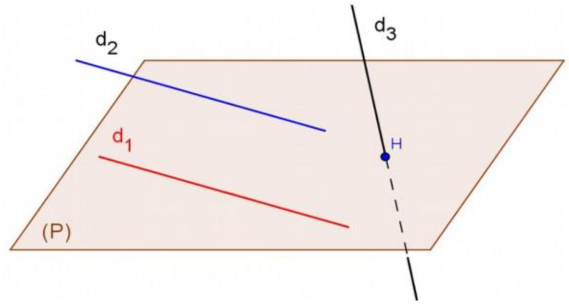
$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}) \longrightarrow (\mathbf{n}) \longrightarrow \text{o‘zaro vaziyat}$$

Bu model orqali: chiziq → parametrik ifoda, tekislik → normal vektor, vektorlar → geometrik holat o‘zaro bog‘landi.

Metodologiyada algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari ham qo‘llanildi. Bu orqali kesishish nuqtalari aniqlandi va fazoviy munosabatlar formal tarzda ifodalandi.

Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya vektor va analitik usullar yordamida chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini aniqlash, ularni klassifikatsiya qilish va geometrik talqinini berish imkonini berdi. Mazkur chizmada uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro uchta asosiy vaziyati tasvirlangan.

Chizmada quyidagi elementlar ko‘rsatiladi:




**To‘g‘ri chiziq (parametrik):**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

**Tekislik:**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

**Normal vektor:**

$$\mathbf{n} = (A, B, C)$$

**Asosiy holatlar**

**1. Kesishuvchi holat** $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$. Chiziq tekislikni bitta nuqtada kesadi. Chizmada bu kesishish nuqtasi aniq ko‘rsatilgan.

**2. Parallel holat.** $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Chiziq tekislikka parallel va uni kesmaydi. Masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**3. Tekislikda yotish holati**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ va } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Chiziq to‘liq tekislik ichida joylashadi.

**Asosiy g‘oya:** $\mathbf{v}$ va $\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow$ o‘zaro vaziyat.

**Natija**

Tadqiqot natijasida uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini vektor va analitik usullar yordamida to‘liq klassifikatsiya qilish mumkinligi asoslandi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, ushbu vaziyatni aniqlash uchun asosiy mezon sifatida yo‘nalish vektori **v**va tekislikning normal vektori **n** o‘rtasidagi munosabat yetarli hisoblanadi.

Asosiy natija quyidagi skalyar ko‘paytma orqali ifodalandi: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$**.** Bu ifoda orqali uchta asosiy holat aniqlandi:

1. **Kesishuvchi holat:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$$

Bu holda chiziq tekislikni bitta nuqtada kesadi.

2. **Parallel holat:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Bu holda chiziq tekislikka parallel bo‘ladi.

3. **Chiziq tekislikda yotadi:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{va} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Bu holda chiziq tekislikning tarkibiy qismi hisoblanadi.

Tadqiqot davomida kesishish nuqtasini aniqlash uchun quyidagi formula chiqarildi:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}$$

Bu natija parametrik tenglama va tekislik tenglamasini birlashtirish orqali olindi.

Shuningdek, kesishish nuqtasi quyidagicha ifodalanadi:

$$(x, y, z) = (x_0 + at,\ y_0 + bt,\ z_0 + ct)$$

Natijalarda masofa tushunchasi ham aniqlashtirildi. Agar chiziq tekislikka parallel boʻlsa, u holda masofa:

$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formula orqali aniqlanadi.

**Teorema (chiziq–tekislik oʻzaro vaziyat prinsipi):** Fazoda toʻgʻri chiziq va tekislikning oʻzaro vaziyati faqat yoʻnalish vektori va normal vektorning skalyar koʻpaytmasi orqali aniqlanadi.

Bu teorema geometrik tahlilni sezilarli darajada soddalashtiradi.

Natijalarda quyidagi muhim xulosa olindi:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \text{ortogonallik emas, balki parallellik}$$

Bu esa fazoviy geometriyada vektorlarning talqinini aniqlashtiradi.

Shuningdek, quyidagi strukturaviy model shakllantirildi:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}) \ \longrightarrow\ (\mathbf{n}) \ \longrightarrow\ \text{holat}$$

Bu model orqali: chiziq → parametrik ifoda, tekislik → normal vektor, skalyar koʻpaytma → geometrik vaziyat oʻzaro bogʻlandi.

Natijalarning yana bir muhim jihati - analitik usullar yordamida fazoviy geometrik masalalarni aniq va tizimli yechish imkoniyati hisoblanadi.

Umuman olganda, olingan natijalar uch oʻlchovli fazoda chiziq va tekislikning oʻzaro vaziyatini aniqlash uchun vektor analiz va analitik geometriya yetarli va samarali vosita ekanligini koʻrsatdi.

**Muhokama**

Olingan natijalar uch oʻlchovli fazoda toʻgʻri chiziq va tekislik oʻzaro vaziyatini aniqlash masalasi vektor analiz yordamida sodda va universal shaklda ifodalanishini koʻrsatdi. Ayniqsa, yoʻnalish vektori **v**va normal vektor **n**oʻrtasidagi munosabat butun geometrik vaziyatni aniqlab berishi ushbu yondashuvning samaradorligini tasdiqlaydi.

Muhokamada aniqlanishicha, quyidagi skalyar koʻpaytma: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ faqat algebraik ifoda emas, balki aniq geometrik ma'noga ega. Agar bu ifoda nolga teng boʻlsa, chiziq tekislikka parallel boʻladi, chunki uning yoʻnalishi tekislik ichidagi yoʻnalishlarga mos keladi. Agar nolga teng boʻlmasa, chiziq tekislikni kesadi.

Geometrik nuqtai nazardan qaraganda:

- **kesishuvchi holatda** chiziq tekislikni bitta nuqtada kesib oʻtadi;
- **parallel holatda** chiziq tekislikdan ma'lum masofada joylashadi;
- **tekislikda yotish holatida** chiziq tekislikning bir qismi boʻladi.

Bu uch holat fazoviy tasavvur uchun fundamental hisoblanadi.

Muhokamada kesishish nuqtasini aniqlash formulasi ham geometrik jihatdan talqin qilindi. Parametr $t$ning qiymati chiziq boʻylab harakatni bildiradi, va uning aniq qiymati tekislik bilan kesishish nuqtasini beradi. Bu esa analitik usulning geometrik mazmunini ochib beradi.

Masofa formulasi: $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ fazoda chiziq va tekislik orasidagi eng qisqa masofani aniqlash imkonini beradi. Bu formula fizik va muhandislik masalalarida juda muhim ahamiyatga ega.

Muhokamada yana bir muhim jihat - analitik va geometrik yondashuvlarning uygʻunligi hisoblanadi. Analitik formulalar aniq natija beradi, geometrik talqin esa bu natijani tushunishga yordam beradi.

Shuningdek, quyidagi umumiy xulosa chiqarildi:

$$\text{vektor analiz} \Rightarrow \text{fazoviy geometriyaning universal tili}$$

Bu esa barcha fazoviy munosabatlarni yagona matematik apparat yordamida ifodalash mumkinligini koʻrsatadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari chiziq va tekislikning oʻzaro vaziyatini analitik usullar yordamida aniqlash nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliy jihatdan ham juda muhim ekanligini koʻrsatdi.

**Xulosa**

Mazkur tadqiqotda uch oʻlchovli fazoda toʻgʻri chiziq va tekislikning oʻzaro vaziyati analitik va geometrik jihatdan tizimli ravishda oʻrganildi. Olingan natijalar shuni koʻrsatdiki, ushbu vaziyatni aniqlash uchun vektor analiz va analitik geometriya usullari yetarli va samarali vosita hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- chiziq va tekislik oʻzaro vaziyati vektorlar orqali aniqlanadi;
- skalyar koʻpaytma asosiy mezon hisoblanadi;
- analitik usullar fazoviy masalalarni aniq yechish imkonini beradi;
- geometrik talqin natijalarni tushunishni osonlashtiradi.

Umuman olganda, olingan natijalar fazoviy geometriyada chiziq va tekislik oʻrtasidagi munosabatlarni aniqlash uchun analitik yondashuv universal va samarali ekanligini koʻrsatdi.

## Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Saparboyev J.Y. (2024). Oʻquvchilarning amaliy faoliyatida fazoviy tasavvurini rivojlantirish mexanizmlari. Eurasian Journal of Academic Research, 7 (Special Issue), 631-633.
2. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
3. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
4. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
5. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
6. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
7. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

8. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.

9. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.

10. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

11. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

12. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

13. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424