

GILBERT AKSIOMALAR SISTEMASIDA IZCHILLIK VA TO'LIQLIK MASALALARI

Abdujabbarova Odinoxon Akmaljon qizi

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19908163>

Annotatsiya: Ushbu maqolada David Gilbert tomonidan ishlab chiqilgan aksiomatik geometriya sistemasida izchillik va to'liqlik masalalari o'rganiladi. Natijalarda Gilbert aksiomalar sistemasining izchilligi Evklid geometriyasi modeli orqali asoslandi, to'liqlik tushunchasi esa barcha geometriya teoremlarini chiqarish imkoniyati sifatida tavsiflandi. Shuningdek, ayrim aksiomalarning mustaqilligi misollar orqali ko'rsatildi. Muhokama qismida olingan natijalar Kurt Gödel ning to'liqlik va noto'liqlik teoremlari bilan bog'liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida aksiomatik tizimlarning izchilligi va to'liqligi matematik nazariyalarning asosiy mantiqiy mezonlari ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: Gilbert aksiomalari, izchillik, to'liqlik, aksiomatik sistema, geometriya asoslari, formal tizim, mantiq, model, mustaqillik, Evklid geometriyasi.

ВОПРОСЫ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ И ПОЛНОТЫ В СИСТЕМЕ АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА

Аннотация: В данной статье исследуются вопросы непротиворечивости и полноты в аксиоматической системе геометрии, разработанной Давидом Гильбертом. В результатах непротиворечивость системы аксиом Гильберта обоснована посредством модели евклидовой геометрии, а понятие полноты охарактеризовано как возможность вывода всех теорем геометрии. Кроме того, независимость отдельных аксиом продемонстрирована на конкретных примерах. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с теоремами Курта Гёделя о полноте и неполноте. В заключение показано, что непротиворечивость и полнота аксиоматических систем являются основными логическими критериями математических теорий.

Ключевые слова: аксиомы Гильберта, непротиворечивость, полнота, аксиоматическая система, основания геометрии, формальная система, логика, модель, независимость, евклидова геометрия.

PROBLEMS OF CONSISTENCY AND COMPLETENESS IN GILBERT'S AXIOM SYSTEM

Abstract: This paper examines the problems of consistency and completeness in the axiomatic system of geometry developed by David Gilbert. The results demonstrate that the consistency of Gilbert's axiom system is justified through the model of Euclidean geometry, while the notion of completeness is characterised as the capacity to derive all theorems of geometry. Furthermore, the independence of certain axioms is illustrated through concrete examples. In the discussion section, the obtained results are analysed in relation to Kurt Gödel's completeness and incompleteness theorems. As a conclusion, it is established that the

consistency and completeness of axiomatic systems constitute the fundamental logical criteria of mathematical theories.

Keywords: Gilbert's axioms, consistency, completeness, axiomatic system, foundations of geometry, formal system, logic, model, independence, Euclidean geometry.

Kirish

Aksiomatik metod zamonaviy matematikaning asosiy tamoyillaridan biri bo'lib, u murakkab nazariyalarni qat'iy mantiqiy asosda qurish imkonini beradi. Bu metod ayniqsa geometriyada muhim ahamiyatga ega bo'lib, unda barcha tushunchalar va teoremlar ma'lum aksiomalar tizimidan deduktiv yo'l bilan chiqariladi. Shu nuqtai nazardan David Gilbert tomonidan ishlab chiqilgan aksiomalar sistemi klassik Evklid geometriyasini qayta asoslashda muhim bosqich bo'ldi.

Gilbert aksiomatikasi geometriyani formal tizim sifatida qaraydi. Bu yerda asosiy tushunchalar - nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik - aniqlanmaydigan tushunchalar sifatida qabul qilinadi, va ular orasidagi munosabatlar aksiomalar orqali belgilanadi. Ushbu tizim quyidagi asosiy guruhlardan iborat: insidensiya aksiomalari, tartib aksiomalari, kongruentlik aksiomalari, paralellik aksiomalari va uzluksizlik aksiomalari.

Aksiomatik tizimni o'rganishda uning mantiqiy xossalari muhim rol o'ynaydi. Eng asosiy tushunchalardan biri - **izchillik (konsistentlik)** bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi: $\nexists \varphi: \varphi$ va $\neg \varphi$ bir vaqtda isbotlanadi. Ya'ni, tizim ichida qarama-qarshi natijalar kelib chiqmasligi kerak.

Ikkinchi muhim tushuncha - **to'liqlik** bo'lib, u quyidagicha ifodalanadi:

$$\forall \varphi, \varphi \text{ yoki } \neg \varphi \text{ isbotlanadi}$$

Bu esa tizimning har qanday matematik gapni aniqlash imkoniyatiga ega ekanligini bildiradi.

Aksiomatik tizimlarning yana bir muhim xossasi - **mustaqillik** hisoblanadi. Agar aksioma boshqa aksiomalardan chiqarib bo'lmasa, u mustaqil deyiladi:

$$A_i \vdash / A_j (i \neq j)$$

Bu xossa aksiomalar ortiqcha emasligini ko'rsatadi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, har qanday matematik nazariya ishonchli bo'lishi uchun u izchil bo'lishi zarur. Agar tizimda qarama-qarshilik mavjud bo'lsa, undan har qanday natijani chiqarish mumkin: $\varphi \wedge \neg \varphi \Rightarrow \psi$. Bu esa tizimni mantiqan yaroqsiz qiladi.

Gilbert aksiomalar sistemasining izchilligi odatda model orqali asoslanadi. Agar aksiomalar uchun kamida bitta model mavjud bo'lsa, tizim izchil hisoblanadi:

$$\exists \mathcal{M}: \mathcal{M} \models A$$

Bu yerda \mathcal{M} - model, A - aksiomalar tizimi.

To'liqlik masalasi esa yanada murakkab bo'lib, u barcha geometrik haqiqatlarning tizim ichida ifodalanishini talab qiladi. Bu muammo keyinchalik Kurt Gödel tomonidan chuqur o'rganilib, umumiy formal tizimlar uchun to'liqlik har doim ham mavjud emasligi ko'rsatildi.

Gilbertning geometriya aksiomatikasi Evklid geometriyasining klassik natijalarini qat'iy mantiqiy asosda tiklashga imkon berdi. Shu bilan birga, u matematik nazariyalarni formal tizim sifatida o'rganish yo'nalishini rivojlantirdi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik, to'liqlik va mustaqillik masalalarini tahlil qilish hamda ularning o'zaro bog'liqligini aniqlashdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, aksiomatik tizimning mantiqiy xossalari yagona tizimda qaraladi va ularning formal mezonlari aniqlashtiriladi. Bu esa matematik nazariyalarni

chuqurroq tushunish imkonini beradi. Shunday qilib, Gilbert aksiomalar sistemasini o‘rganish matematik mantiq va geometriya asoslarining muhim qismi bo‘lib, u nazariy va falsafiy jihatdan katta ahamiyatga ega.

Metod

Mazkur tadqiqot David Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik va to‘liqlik masalalarini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, matematik mantiq, formal tizimlar nazariyasi va model qurish metodlari asosida olib borildi. Tadqiqotda aksiomatik tizim \mathcal{A} va undan hosil qilinadigan teoremlar to‘plami formal ravishda qaraldi.

Metodologiyaning markaziy g‘oyasi aksiomatik tizimni formal mantiq tilida ifodalashdan iborat. Har bir aksioma mantiqiy formulalar orqali yozilib, quyidagi ko‘rinishda qaraldi: $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Tizimdan chiqariladigan barcha teoremlar quyidagi yopilish orqali aniqlanadi:

$$\text{Th}(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \vdash \varphi\}$$

Izchillikni tekshirish metodologiyada asosiy bosqich sifatida qaraldi. Tizim izchil bo‘lishi uchun quyidagi shart bajarilishi kerak:

$$\nexists \varphi : \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ va } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$$

Bu shart aksiomalar sistemasida qarama-qarshilik yo‘qligini bildiradi.

Izchillikni isbotlash uchun model nazariyasi qo‘llanildi. Agar aksiomalar uchun model mavjud bo‘lsa: $\exists \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \mathcal{A}$ u holda tizim izchil deb qaraladi. Bu metod Evklid geometriyasini real sonlar fazosida talqin qilish orqali amalga oshirildi.

Metodologiyada to‘liqlik tushunchasi quyidagi mezon orqali tahlil qilindi:

$$\forall \varphi, \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ yoki } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$$

Bu ta‘rif tizimning har qanday matematik gapni aniqlash imkoniyatini bildiradi.

Shuningdek, semantik to‘liqlik tushunchasi ham qo‘llanildi:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \varphi$$

Bu yerda mantiqiy oqibat va isbotlanish o‘rtasidagi bog‘lanish o‘rganildi.

Metodologiyada aksiomalarning mustaqilligini tekshirish uchun quyidagi usul qo‘llanildi:

$$A_i \text{ mustaqil} \Leftrightarrow \mathcal{A} \setminus \{A_i\} \vdash A_i$$

Bu usul orqali har bir aksiomaning alohida ahamiyati aniqlanadi.

Tadqiqotda kontrmodel qurish metodi ham qo‘llanildi. Agar biror aksioma chiqarib tashlanganda yangi model paydo bo‘lsa:

$$\exists \mathcal{M}' : \mathcal{M}' \models \mathcal{A} \setminus \{A_i\}, \mathcal{M}' \not\models A_i$$

u holda A_i mustaqil hisoblanadi.

Metodologiyada deduktiv tizimning yopiq xossasi ham tahlil qilindi:

$$\mathcal{A} \vdash \varphi, \varphi \vdash \psi \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \psi$$

Bu xossa teoremlar tizimini ketma-ket kengaytirish imkonini beradi.

Shuningdek, qarama-qarshilikdan istalgan natijani chiqarish prinsipi (ex contradictione quodlibet) ham muhim rol o‘ynadi: $\varphi \wedge \neg \varphi \Rightarrow \psi$. Bu natija izchillikning zarurligini yana bir bor asoslaydi.

Metodologiyada formal tizim va model o‘rtasidagi bog‘lanish quyidagicha umumlashirildi: $\mathcal{A} \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. Bu natija har bir isbotlangan teorema modelda ham to‘g‘ri bo‘lishini ko‘rsatadi. Shuningdek, Kurt Gödel natijalari metodologiyada muhim nazariy asos sifatida qaraldi. Unga ko‘ra, yetarlicha kuchli formal tizimlar uchun: $\exists \varphi : \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ va } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$. Bu esa to‘liqlik har doim ham ta‘minlanmasligini ko‘rsatadi.

Yakuniy bosqichda aksiomatik tizimning umumiy modeli quyidagicha ifodalandi: $(\mathcal{A}, \vdash, \models)$. Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya Gilbert aksiomalar sistemasining izchilligi, to'liqligi va mustaqilligini formal mantiq asosida tahlil qilish, ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash va matematik nazariyalar uchun umumiy mezonlar ishlab chiqish imkonini berdi.

Natija

Tadqiqot natijasida David Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik, to'liqlik va mustaqillik masalalari tizimli ravishda tahlil qilindi hamda ularning o'zaro bog'liqligi aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, aksiomatik tizimning mantiqiy barqarorligi uning izchilligi bilan, matematik kuchi esa to'liqligi bilan belgilanadi.

Avvalo, izchillik uchun quyidagi asosiy mezon qat'iy asoslandi:

$$\nexists \varphi: \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ va } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$$

Bu natija aksiomalar sistemasida qarama-qarshilik mavjud bo'lmasligini bildiradi.

Natijalarda izchillikning model orqali tavsifi ham aniqlandi:

$$\exists \mathcal{M}: \mathcal{M} \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ izchil}$$

Bu esa geometriya aksiomalarini real fazo orqali talqin qilish imkonini beradi.

To'liqlik uchun quyidagi mezon keltirildi: $\forall \varphi, \mathcal{A} \vdash \varphi$ yoki $\mathcal{A} \vdash \neg \varphi$. Bu natija tizimning barcha matematik gaplarni aniqlash imkoniyatini ifodalaydi.

Teorema (Izchillik-model ekvivalentligi teoremasi): Agar aksiomatik tizim uchun model mavjud bo'lsa, u holda tizim izchil bo'ladi va undan qarama-qarshi natijalar chiqarib bo'lmaydi.

Bu teorema aksiomatik tizimlarning mantiqiy ishonchliligini model orqali asoslash imkonini beradi.

Natijalarda mustaqillik uchun quyidagi mezon aniqlashtirildi:

$$A_i \text{ mustaqil} \Leftrightarrow \mathcal{A} \setminus \{A_i\} \vdash / A_i$$

Bu natija aksiomalarining ortiqcha emasligini ko'rsatadi.

Shuningdek, kontrmodel usuli orqali mustaqillikni tekshirish quyidagicha ifodalandi:

$$\exists \mathcal{M}': \mathcal{M}' \models \mathcal{A} \setminus \{A_i\}, \mathcal{M}' \not\models / A_i$$

Natijalarda yana bir muhim xossa aniqlandi: $\varphi \wedge \neg \varphi \Rightarrow \psi$. Bu esa qarama-qarshilik mavjud bo'lsa, istalgan natijani chiqarish mumkinligini bildiradi va izchillikning zarurligini asoslaydi. Shuningdek, quyidagi bog'lanish aniqlashtirildi:

$$\mathcal{A} \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$$

Bu natija isbotlangan teoremlar modelda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatadi.

Natijalarda Kurt Gödel natijalari bilan bog'liq quyidagi umumlashma ham keltirildi: $\exists \varphi: \mathcal{A} \vdash / \varphi$ va $\mathcal{A} \vdash / \neg \varphi$. Bu esa yetarlicha kuchli formal tizimlar uchun to'liqlik har doim ham mavjud emasligini ko'rsatadi.

Shuningdek, quyidagi muhim xulosa olindi: Izchil tizim $\not\Rightarrow$ to'liq tizim. Bu natija aksiomatik tizimlarning chegaralarini ko'rsatadi.

Natijalarda aksiomatik tizimning umumiy modeli quyidagicha ifodalandi: $(\mathcal{A}, \vdash, \models)$. Bu model orqali aksiomalar, isbot va mantiqiy oqibatlar yagona tizimda qaraldi.

Umuman olganda, olingan natijalar Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik va to'liqlik masalalari matematik mantiqning asosiy muammolari ekanligini va ular orqali nazariyaning ishonchliligi hamda kuchi baholanishini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar David Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik va to'liqlik masalalari matematik nazariyalarning asosiy mantiqiy mezonlari ekanligini yana bir bor tasdiqladi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, aksiomatik tizimni baholashda faqat geometrik mazmun emas, balki uning formal-mantiqiy xossalari hal qiluvchi ahamiyatga ega.

Muhokama jarayonida izchillik tushunchasi markaziy o'rin egalladi:

$$\nexists \varphi: \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ va } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$$

Bu shart bajarilmagan holatda tizim mantiqan yaroqsiz bo'lib qoladi, chunki qarama-qarshilikdan istalgan natijani chiqarish mumkin: $\varphi \wedge \neg \varphi \Rightarrow \psi$. Shu sababli izchillik matematik nazariyaning eng muhim talablaridan biri hisoblanadi.

Muhokamada model nazariyasining roli alohida ta'kidlandi. Agar aksiomalar uchun model mavjud bo'lsa: $\exists \mathcal{M}: \mathcal{M} \models \mathcal{A}$ u holda tizim izchil hisoblanadi. Bu natija geometriyada Evklid fazosini model sifatida qabul qilish orqali amalga oshiriladi.

To'liqlik tushunchasi esa tizimning matematik kuchini ifodalaydi:

$$\forall \varphi, \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ yoki } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$$

Biroq muhokama davomida bu talab juda kuchli ekani va har doim ham bajarilmasligi qayd etildi. Aynan shu jihat Kurt Gödel tomonidan chuqur o'rganilgan bo'lib, u quyidagi fundamental natijani ko'rsatdi: $\exists \varphi: \mathcal{A} \vdash \varphi \text{ va } \mathcal{A} \vdash \neg \varphi$. Bu esa yetarlicha boy formal tizimlarda to'liqlik va izchillikni bir vaqtda to'liq ta'minlash mumkin emasligini bildiradi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - izchillik va to'liqlik o'rtasidagi farq hisoblanadi: Izchil tizim \nRightarrow to'liq tizim. Bu natija shuni ko'rsatadiki, tizim qarama-qarshiliksiz bo'lsa ham, barcha haqiqatlarni isbotlay olmasligi mumkin.

Aksiomalarining mustaqilligi ham muhim o'rin egalladi:

$$A_i \text{ mustaqil} \Leftrightarrow \mathcal{A} \setminus \{A_i\} \vdash A_i$$

Bu xossa aksiomatik tizimni optimallashtirish va ortiqcha aksiomalarni aniqlash imkonini beradi. Muhokama davomida formal tizim va model o'rtasidagi bog'lanish quyidagicha umumlashtirildi: $\mathcal{A} \vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. Bu esa har qanday isbotlangan teorema modelda ham to'g'ri bo'lishini bildiradi. Nazariy jihatdan, Gilbertning aksiomatikasi matematikani formal tizim sifatida qurish g'oyasini ilgari surdi. Bu yondashuv keyinchalik mantiq, informatika va sun'iy intellektda keng qo'llanildi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda David Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik, to'liqlik va mustaqillik masalalari tizimli ravishda o'rganildi hamda ularning o'zaro bog'liqligi chuqur tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, aksiomatik tizimning mantiqiy barqarorligi va matematik ahamiyati aynan ushbu xossalari orqali aniqlanadi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari Gilbert aksiomalar sistemasida izchillik va to'liqlik masalalari matematik mantiqning asosiy muammolari ekanligini va ular orqali matematik nazariyalarning ishonchligi hamda chegaralari aniqlanishini ko'rsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). – Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. – Translated by T. L. Heath. – Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.

4. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, 1(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.
12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, 6(1), 282-293. <https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424>