PROYEKTIV TEKISLIKDAGI IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNI KLASSIFIKATSIYALASH, ULARNING INVARIANTLARI VA KANONIK KOʻRINISHLARI TAHLILI

Ibrohimov Azizbek Baxodir o'g'li
Matematika yoʻnalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.19907925

Annotatsiya: Ushbu maqolada proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar (konikalar)ning klassifikatsiyasi, ularning invariantlari va kanonik koʻrinishlari oʻrganiladi. Natijalarda konikalar degeneratsiyalangan va degeneratsiyalanmagan holatlarga ajratildi, diskriminant va determinantlar asosiy invariantlar sifatida qaraldi. Shuningdek, konikalar kanonik koʻrinishlarga keltirildi. Muhokama qismida ushbu natijalar chizma geometriya, optika va kompyuter grafikada qoʻllanishi bilan bogʻliq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida proyektiv invariantlar konikalarni toʻliq tavsiflash imkonini berishi koʻrsatildi.

Kalit soʻzlar: proyektiv tekislik, konika, ikkinchi tartibli chiziq, invariant, determinant, rang, kanonik koʻrinish, kvadratik forma, gomogen koordinatalar.

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ, АНАЛИЗ ИХ ИНВАРИАНТОВ И КАНОНИЧЕСКИХ ФОРМ

Аннотация: В данной статье исследуются классификация кривых второго порядка (коник) в проективной плоскости, их инварианты и канонические формы. В результатах коники разделены на вырожденные и невырожденные случаи, дискриминант и определители рассмотрены в качестве основных инвариантов. Кроме того, коники приведены к каноническим формам. В разделе обсуждения данные результаты проанализированы в связи с их применением в начертательной геометрии, оптике и компьютерной графике. В заключение показано, что проективные инварианты позволяют дать полное описание коник.

Ключевые слова: проективная плоскость, коника, кривая второго порядка, инвариант, определитель, ранг, каноническая форма, квадратичная форма, однородные координаты.

CLASSIFICATION OF SECOND-ORDER CURVES IN THE PROJECTIVE PLANE, ANALYSIS OF THEIR INVARIANTS AND CANONICAL FORMS

Abstract: This paper investigates the classification of second-order curves (conics) in the projective plane, their invariants, and canonical forms. The results divide conics into degenerate and non-degenerate cases, with the discriminant and determinants regarded as the principal invariants. Furthermore, the conics are reduced to canonical forms. In the discussion section, these results are analysed in connection with their applications in descriptive geometry, optics, and computer graphics. As a conclusion, it is demonstrated that projective invariants enable a complete characterisation of conics.

Keywords: projective plane, conic, second-order curve, invariant, determinant, rank, canonical form, quadratic form, homogeneous coordinates.

Kirish

Proyektiv tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar (konikalar) klassik geometriyaning muhim obyektlari bo'lib, ular algebraik va geometrik jihatdan chuqur o'rganilgan. Proyektiv yondashuvning afzalligi shundaki, u barcha konikalarni yagona tizimda qarash imkonini beradi va ularning o'zaro bog'liqligini invariantlar orqali ifodalaydi.

Proyektiv tekislikda konika gomogen koordinatalarda umumiy kvadratik tenglama orqali beriladi:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

Bu tenglama matritsali ko'rinishda quyidagicha yoziladi: $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ bu yerda

$$\mathbf{x} = (x, y, z), A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

Mazkur matritsa simmetrik bo'lib, konikaning asosiy xossalari aynan Aorqali aniqlanadi.

Proyektiv transformatsiyalar:

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det\ T \neq 0$$

ostida konika quyidagicha o'zgaradi:

$$\mathbf{x}'^T A'\mathbf{x}' = 0, A' = T^T AT$$

Bu transformatsiya konikaning geometrik shaklini o'zgartirishi mumkin, ammo uning invariant xossalarini saqlaydi.

Konikalarni klassifikatsiya qilishda quyidagi asosiy invariantlar muhim rol o'ynaydi: determinant $\det A$, rang (rank) rank (A). Bu invariantlar yordamida konikalar quyidagi asosiy turlarga ajratiladi: **degeneratsiyalangan konikalar** ($\det\ A = 0$), **degeneratsiyalanmagan konikalar** ($\det\ A \neq 0$).

Degeneratsiyalanmagan konikalar proyektiv transformatsiyalar yordamida kanonik ko'rinishga keltiriladi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

(yoki unga ekvivalent shakllar)

Affine koordinatalarda esa ular quyidagi klassik ko'rinishlarga keladi: ellips, giperbola va parabola.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, konikalar matematik modellashtirish, optika, mexanika va kompyuter grafikada keng qo'llaniladi. Proyektiv geometriya orqali ularni yagona tizimda o'rganish ushbu obyektlarning chuqur xossalarini ochib beradi. Shuningdek, invariantlar nazariyasi konikalarni koordinatalardan mustaqil tarzda tavsiflash imkonini beradi. Bu esa geometrik obyektlarning haqiqiy mohiyatini aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni klassifikatsiya qilish, ularning invariantlarini aniqlash va kanonik ko'rinishlarini tahlil qilishdan iborat.Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, konikalar invariantlar asosida yagona tizim sifatida qaraladi va ularning algebraik hamda geometrik talqini birlashtiriladi.Shunday qilib, proyektiv tekislikdagi konikalarni o'rganish invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur tushunish imkonini beradi.

Metod

Mazkur tadqiqot proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni (konikalarni) oʻrganishga qaratilgan boʻlib, gomogen koordinatalar, matritsali ifodalash, determinant va rang (rank) tahlili hamda proyektiv transformatsiyalar metodlari asosida olib borildi.

Avvalo, konikalarni klassifikatsiya qilish uchun determinant ishlatildi:

$$\det A$$

Natijada quyidagi asosiy ajratish amalga oshirildi:

$$\det\ A \neq 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalanmagan konika}$$

$$\det\ A = 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalangan konika}$$

Shuningdek, matritsaning rangi ham muhim mezon sifatida qoʻllanildi:

$$\text{rank}\ (A)$$

Bu orqali quyidagi holatlar aniqlashtirildi:

- $\text{rank}\ (A) = 3 \rightarrow$ toʻliq konika
- $\text{rank}\ (A) = 2 \rightarrow$ ikki chiziq (juft chiziq)
- $\text{rank}\ (A) = 1 \rightarrow$ takroriy chiziq

Metodologiyada proyektiv transformatsiyalar orqali konikani soddalashtirish asosiy bosqichlardan biri boʻldi:

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det\ T \neq 0$$

Bu holda matritsa quyidagicha oʻzgaradi:

$$A' = T^T A T$$

Mazkur transformatsiya yordamida konika kanonik koʻrinishga keltirildi. Diagonalizatsiya usuli qoʻllanilib:

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Natijada tenglama soddalashtirildi:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

Bu koʻrinish konikani tahlil qilish uchun eng qulay shakl hisoblanadi.

Affine koordinatalarga oʻtish orqali klassik konikalar ajratildi:

a) ellips: $x^2 + y^2 = 1$

b) giperbola: $x^2 - y^2 = 1$

c) parabola: $y^2 = 2px$

Metodologiyada invariant sifatida determinant bilan bir qatorda quyidagi ifodalar ham qaraldi:

$$\text{minor determinantlar}$$

va ular orqali konikaning geometrik xossalari aniqlashtirildi.

Shuningdek, koordinata almashtirishda invariantlik quyidagicha tekshirildi:

$$\det\ A' = (\det\ T)^2 \det\ A$$

Bu natija determinantning proyektiv invariant emas, balki kovariant xarakterga ega ekanligini koʻrsatadi, lekin uning nolga teng yoki teng emasligi invariant boʻlib qoladi.

Metodologiyada quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$\text{konika} \longrightarrow A \longrightarrow (\det\ A, \text{rank}\ A) \longrightarrow \text{klassifikatsiya}$$

Bu model orqali: algebraik ifoda → matritsa, matritsa → invariantlar, invariantlar → geometrik tur oʻzaro bogʻlandi.

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya konikalarni invariantlar asosida klassifikatsiya qilish, ularni kanonik ko'rinishga keltirish va geometrik xossalarini aniqlash imkonini berdi.

Mazkur chizmada proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar (konikalar) va ularning invariant xossalari vizual tarzda tasvirlangan.

Chizmada quyidagi asosiy elementlar aks etadi:

Umumiy konika

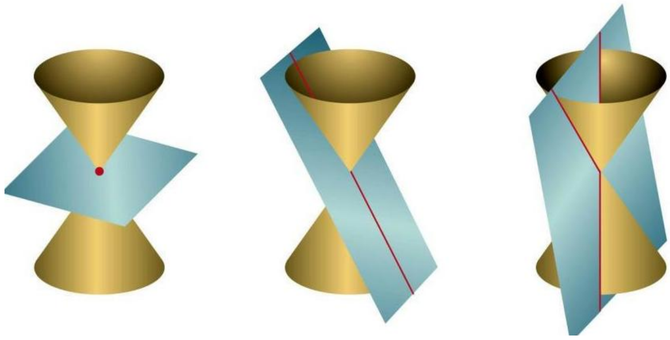
$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Kanonik ko'rinishlar (affin holatda):

ellips: $x^2 + y^2 = 1$

giperbola: $x^2 - y^2 = 1$

parabola: $y^2 = 2px$



Degeneratsiyalangan konikalar: ikki kesishuvchi chiziq, parallel chiziqlar, takroriy chiziq.

Proyektiv transformatsiya:

$$A' = T^T AT$$

Chizmada ko'rsatilgan asosiy g'oya shundan iboratki:

$$\text{turli ko'rinishlar} \implies \text{bir xil proyektiv sinf}$$

ya'ni barcha degeneratsiyalanmagan konikalar proyektiv transformatsiyalar orqali bir-biriga o'tkaziladi.

Asosiy invariant bog'lanish

$$A \ \Rightarrow \ (\det A, \operatorname{rank} A) \ \Rightarrow \ \text{konika turi}$$

Natija

Tadqiqot natijasida proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni invariantlar yordamida to'liq klassifikatsiya qilish mumkinligi asoslandi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, konikaning barcha muhim geometrik xossalari uning matritsasi Aorqali aniqlanadi.

Avvalo, quyidagi fundamental bog'lanish aniqlandi:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$$

Bu tenglama konikaning algebraik modelini ifodalaydi, va uning xossalari Aorqali tavsiflanadi.

Tadqiqot davomida quyidagi asosiy invariant mezonlar shakllantirildi:

Determinant orqali ajratish:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalanmagan konika}$$
$$\det A = 0 \Rightarrow \text{degeneratsiyalangan konika}$$

Rang (rank) orqali aniqlashtirish:

$$\operatorname{rank}(A) = 3 \Rightarrow \text{to'liq konika}$$
$$\operatorname{rank}(A) = 2 \Rightarrow \text{ikki to'g'ri chiziq}$$
$$\operatorname{rank}(A) = 1 \Rightarrow \text{takroriy chiziq}$$

Bu natijalar konikalarni algebraik jihatdan to'liq ajratish imkonini berdi.

Teorema (konikalarni proyektiv klassifikatsiya prinsipi): Har qanday degeneratsiyalanmagan konika proyektiv transformatsiya yordamida yagona kanonik ko'rinishga keltiriladi.

Natijada barcha konikalar quyidagi umumiy kanonik tenglamaga keltirildi:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

(yoki unga ekvivalent shakllar)

Bu natija proyektiv geometriyada barcha konikalar ekvivalent ekanligini koʻrsatadi.

Natijalarda quyidagi muhim invariant xossa aniqlandi:

$$\det A' = (\det T)^2 \det A$$

Bu esa determinantning nol yoki nol emasligi proyektiv invariant ekanligini bildiradi.

Shuningdek, quyidagi natija olindi:

$$\operatorname{rank}(A') = \operatorname{rank}(A)$$

Bu esa rangning toʻliq invariant ekanligini koʻrsatadi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumiy strukturaviy model shakllantirildi:

$$A \longrightarrow (\det A, \operatorname{rank} A) \longrightarrow \text{konika turi}$$

Bu model konikalarni aniqlash uchun universal vosita sifatida taklif qilindi.

Natijalarning yana bir muhim jihati - konikaning geometriyasi koordinatalarga bogʻliq emasligi hisoblanadi. Ya'ni:

$$\text{proyektiv transformatsiya} \Rightarrow \text{shakl oʻzgaradi, lekin tur saqlanadi}$$

Bu natija invariantlar nazariyasining kuchini koʻrsatadi.

Shuningdek, quyidagi muhim xulosa olindi:

$$\text{konikaning barcha xossalari} \equiv \text{uning invariantlari}$$

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni invariantlar orqali toʻliq klassifikatsiya qilish mumkinligini va bu yondashuv geometrik tahlilni sezilarli darajada soddalashtirishini koʻrsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar invariantlar orqali toʻliq tavsiflanishini koʻrsatdi. Ayniqsa, determinant va rang kabi algebraik kattaliklar konikaning geometrik mohiyatini aniqlovchi asosiy mezonlar sifatida namoyon boʻldi.

Muhokamada aniqlanishicha, konikaning tenglamasi:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$$

faqat algebraik ifoda emas, balki geometrik obyektning toʻliq modeli hisoblanadi. Bu model orqali konikaning barcha xossalari Amatritsa orqali aniqlanadi.

Determinantning nolga teng yoki teng emasligi konikaning degeneratsiyalangan yoki toʻliq ekanligini aniqlaydi:

$$\det A = 0 \text{yoki} \det A \neq 0$$

Bu natija konikalarni eng sodda va samarali usulda ajratish imkonini beradi.

Muhokamada rang (rank) tushunchasi yanada chuqurroq talqin qilindi. Rang konikaning nechta mustaqil kvadratik komponentga ega ekanligini bildiradi:

$$\operatorname{rank}(A)$$

Bu orqali konikaning tuzilishi - bitta egri chiziqmi yoki ikki chiziqdan iboratmi - aniqlanadi.

Proyektiv transformatsiyalar ostida konikalar shakli oʻzgarishi mumkin, lekin ularning invariantlari saqlanadi:

$$A' = T^T A T$$

Bu esa quyidagi muhim xulosaga olib keladi:

$$\text{konikaning turi} \equiv \text{invariantlar orqali aniqlanadi}$$

Muhokamada yana bir muhim jihat - konikalarni kanonik koʻrinishga keltirish hisoblanadi. Diagonalizatsiya orqali murakkab tenglamalar soddalashtirilib:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

ko'rinishga keltiriladi. Bu esa konikani tahlil qilishni ancha osonlashtiradi.

Geometrik nuqtai nazardan, proyektiv tekislikda barcha degeneratsiyalanmagan konikalar o'zaro ekvivalentdir. Bu natija Evklid geometriyasidan tubdan farq qiladi va proyektiv yondashuvning kuchini ko'rsatadi.

Muhokamada dual konika tushunchasi ham alohida o'rganildi. Har bir konikaga unga mos keluvchi dual konika mavjud bo'lib, u quyidagi prinsip asosida aniqlanadi:

nuqtalar ↔ tangentlar

Bu esa proyektiv geometriyada dualizmning yana bir muhim ko'rinishidir.

Shuningdek, proyektiv invariantlar yordamida turli koordinatalarda berilgan konikalarni taqqoslash mumkin bo'ladi. Bu esa real masalalarda juda muhim ahamiyatga ega. Muhokama natijalari shuni ko'rsatdiki, konikalarni invariantlar orqali o'rganish geometrik tahlilni sezilarli darajada soddalashtiradi va umumlashtiradi. Umuman olganda, proyektiv geometriyada konikalar invariantlar yordamida tavsiflanadigan fundamental obyektlar bo'lib, ular orqali murakkab geometrik strukturalarni tushunish mumkin.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarni klassifikatsiyalash, ularning invariantlari va kanonik ko'rinishlari tizimli ravishda o'rganildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, konikalarni invariantlar asosida tavsiflash ularning geometrik mohiyatini aniqlashda eng samarali yondashuv hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- konikalar invariantlar orqali to'liq tavsiflanadi;
- determinant va rang asosiy klassifikatsiya mezonlari hisoblanadi;
- proyektiv transformatsiyalar shaklni o'zgartiradi, lekin turini saqlaydi;
- kanonik ko'rinish tahlilni soddalashtiradi;
- dualizm konikalarni chuqurroq tushunish imkonini beradi.

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar invariantlar orqali aniqlanadigan fundamental geometrik obyektlar ekanligini ko'rsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).

7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.

8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.

9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424