IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING QUTB KOORDINATALARIDAGI TENGLAMALARI, ULARNING ANALITIK TAHLILI VA GEOMETRIK TALQINI

Usibjonova Oygul Almardon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.19889126

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartibli chiziqlarning (konikalar) qutb koordinatalardagi tenglamalari, ularning analitik tahlili va geometrik talqini o'rganiladi. Natijalarda konikalarning umumiy tenglamasi $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ ko'rinishda ifodalanishi, bu yerda e-eksentrisitet orqali ularning turlari aniqlanishi ko'rsatildi. Muhokamada ushbu tenglamalarning mexanika, astronomiya va optikadagi qo'llanilishi tahlil qilindi. Xulosa sifatida qutb koordinatalar konikalarni tabiiy va qulay ifodalash vositasi ekanligi asoslandi.

Kalit so'zlar: konika, qutb koordinatalar, eksentrisitet, fokus, direktrisa, ellips, parabola, giperbola, analitik geometriya.

УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ, ИХ АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Аннотация: В данной статье исследуются уравнения кривых второго порядка (коник) в полярных координатах, их аналитический анализ и геометрическая интерпретация. В результатах показано, что общее уравнение коник выражается в виде $r = \frac{p}{1\pm e\cos\theta}$, где через эксцентриситет eопределяется их тип. В разделе обсуждения проанализировано применение данных уравнений в механике, астрономии и оптике. В заключение обосновано, что полярные координаты являются естественным и удобным средством выражения коник.

Ключевые слова: коника, полярные координаты, эксцентриситет, фокус, директриса, эллипс, парабола, гипербола, аналитическая геометрия.

EQUATIONS OF SECOND-ORDER CURVES IN POLAR COORDINATES, THEIR ANALYTICAL ANALYSIS AND GEOMETRIC INTERPRETATION

Abstract: This paper investigates the equations of second-order curves (conics) in polar coordinates, their analytical analysis, and geometric interpretation. The results demonstrate that the general equation of conics is expressed in the form $r = \frac{p}{1\pm e\cos\theta}$, where the type of conic is determined through the eccentricity e. In the discussion section, the application of these equations in mechanics, astronomy, and optics is analysed. As a conclusion, it is substantiated that polar coordinates constitute a natural and convenient means of expressing conics.

Keywords: conic, polar coordinates, eccentricity, focus, directrix, ellipse, parabola, hyperbola, analytic geometry.

Kirish

Ikkinchi tartibli chiziqlar - ellips, parabola va giperbola - analitik geometriyaning asosiy obyektlari bo'lib, ular turli koordinatalar sistemasida ifodalanishi mumkin. Qutb koordinatalar tizimi esa ushbu chiziqlarni ayniqsa qulay va tabiiy tarzda ifodalash imkonini beradi, chunki u fokusga asoslangan ta'rif bilan bevosita bog'langan.

Qutb koordinatalar tizimida nuqta quyidagicha beriladi: (r, θ) bu yerda r- radius-vektor, θ- burchak.

Dekart koordinatalar bilan bog'lanish quyidagicha:

$$x = r\cos\,\theta, y = r\sin\,\theta$$

Konikalar fokus va direktrisa yordamida aniqlanadi. Ta'rifga ko'ra, nuqtaning fokusgacha bo'lgan masofasi direktrisagacha bo'lgan masofaga nisbati doimiy bo'ladi:

$$\frac{PF}{PD} = e$$

bu yerda e- **eksentrisitet**.

Ushbu ta'rifdan konikaning qutb koordinatalardagi umumiy tenglamasi hosil qilinadi:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\,\theta}$$

Bu yerda: p- yarim latus-rektum, e- eksentrisitet.

Eksentrisitet qiymatiga qarab konikaning turi aniqlanadi: $0 < e < 1 \rightarrow$ **ellips**, $e = 1 \rightarrow$ **parabola** va $e > 1 \rightarrow$ **giperbola**.

Mazkur tenglama konikalarning barcha turlarini yagona formulada ifodalash imkonini beradi. Qutb koordinatalar tizimining afzalligi shundaki, konika fokus atrofida tabiiy ravishda ifodalanadi. Bu esa fizik va astronomik masalalarda juda qulay hisoblanadi.

Masalan, ellipsning qutb tenglamasi: $r = \frac{p}{1+e\cos\,\theta}$ bo'lib, u fokusdan masofaning burchakka bog'liqligini ko'rsatadi. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, konikalar yagona qutb tenglama orqali umumlashtiriladi va ularning geometrik xossalari eksentrisitet orqali tahlil qilinadi. Shunday qilib, qutb koordinatalar tizimi konikalarni o'rganishda qulay va samarali matematik vosita hisoblanadi.

Metod

Mazkur tadqiqotda ikkinchi tartibli chiziqlarni qutb koordinatalar tizimida ifodalash va ularning xossalarini aniqlash analitik geometriya hamda algebraik transformatsiyalar asosida olib borildi, bunda asosiy yondashuv sifatida fokus va direktrisa orqali berilgan ta'rifdan foydalanildi, ya'ni har qanday konika uchun nuqtaning fokusgacha bo'lgan masofasi uning direktrisagacha bo'lgan masofasiga proporsional bo'lishi sharti asos qilib olindi.

Tadqiqot jarayonida koordinatalar bosh nuqtasi fokusga joylashtirildi va direktrisa $x = -d$ ko'rinishda tanlab olindi, bu orqali nuqtaning koordinatalari qutb sistemasida r va θ orqali ifodalandi hamda fokusgacha bo'lgan masofa $r$ga teng deb olindi, direktrisagacha bo'lgan masofa esa Dekart koordinatalar orqali yozilib,

$x = r\cos\,\theta$ almashtirish yordamida ifodaga kiritildi.

Shu asosda quyidagi tenglik hosil qilindi:

$$\frac{r}{r\cos\,\theta + d} = e$$

bu yerda e- eksentrisitet, ushbu tenglamani algebraik o'zgartirishlar orqali yechish natijasida konikaning umumiy qutb tenglamasi chiqarildi: $r = \frac{ed}{1-e\cos\,\theta}$ yoki mos belgilash orqali: $r = \frac{p}{1+e\cos\,\theta}$. Metodologiyada eksentrisitet asosiy parametr sifatida qaraldi va uning qiymatiga qarab konikalar klassifikatsiya qilindi, bunda $e$ning qiymati birlikdan kichik bo'lsa yopiq egri chiziq hosil bo‘lishi, birlikka teng bo‘lsa chegaraviy holat yuzaga kelishi, birlikdan katta bo‘lsa ochiq egri chiziq paydo bo‘lishi analitik jihatdan asoslab berildi.

Analitik tahlilda funksiyaning xossalari ham o‘rganildi, xususan $r(\theta)$funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari topildi, buning uchun $\cos\ \theta = \pm 1$holatlar qaralib, quyidagi natijalar olindi:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}, r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

bu ifodalar ayniqsa ellips uchun chegaralanganlikni ko‘rsatadi, giperbola uchun esa ayrim burchaklarda $r$cheksizga intilishi aniqlanadi.

Metodologiyada qutb tenglamani Dekart koordinatalarga o‘tkazish ham amalga oshirildi, bunda $x = r\cos\ \theta$, $y = r\sin\ \theta$almashtirishlari orqali tenglama kvadratik shaklga keltirildi va konikaning klassik tenglamalari bilan bog‘lanishi ko‘rsatildi, bu esa qutb va Dekart sistemalar o‘rtasidagi uzviy aloqani aniqlash imkonini berdi.

Shuningdek, simmetriya xossalari ham tahlil qilindi, ya’ni $\cos\theta$funksiyaning juftligi sababli konikalar o‘qga nisbatan simmetrik bo‘lishi, burchak o‘zgarishi orqali egri chiziqning to‘liq qurilishi mumkinligi ko‘rsatildi.

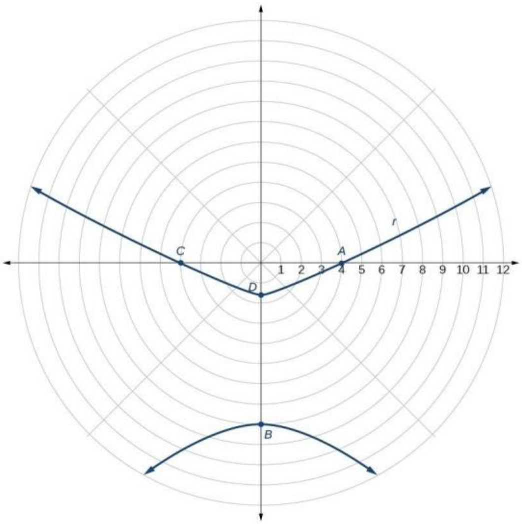
Metodologiyada quyidagi umumiy model shakllantirildi:

fokus va direktrisa $\Rightarrow$ qutb tenglama $\Rightarrow$ analitik xossalar $\Rightarrow$ geometrik talqin

Bu model orqali geometrik ta’rifdan analitik tenglamaga o‘tish va undan geometrik xulosalar chiqarish jarayoni yagona tizimda birlashtirildi.

Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya ikkinchi tartibli chiziqlarni qutb koordinatalar orqali ifodalash, ularning parametrlarini aniqlash va analitik hamda geometrik xossalarini chuqur tahlil qilish imkonini berdi.

Mazkur chizmada ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalardagi umumiy tenglamasi asosida hosil bo‘ladigan egri chiziqlar tasvirlangan, bunda barcha konikalar yagona formuladan kelib chiqadi:



$$r = \frac{p}{1 + e\cos\ \theta}$$

bu yerda r- fokusdan masofa, θ- burchak, e- eksentrisitet, p- parametr.

Chizmada eksentrisitet qiymatiga bog‘liq holda egri chiziq shaklining qanday o‘zgarishi vizual ko‘rsatiladi, ya’ni $0 < e < 1$holatda yopiq egri chiziq hosil bo‘lib ellips shakli yuzaga keladi, $e = 1$bo‘lganda chegaraviy holat sifatida parabola paydo bo‘ladi, $e > 1$da esa ochiq egri chiziq sifatida giperbola shakllanadi.

Shuningdek, fokusning koordinata boshida joylashgani va barcha nuqtalar radius-vektor orqali aniqlanishi qutb koordinatalarning geometrik qulayligini ko‘rsatadi, bu esa egri chiziqlarni fizik va geometrik jihatdan tushunishni osonlashtiradi.

Asosiy g‘oya: $e \Rightarrow r(\theta) \Rightarrow$ egri chiziq shakli.

Natija

Tadqiqot natijasida ikkinchi tartibli chiziqlarni qutb koordinatalar tizimida yagona analitik model orqali ifodalash mumkinligi asoslandi, bunda asosiy tenglama sifatida

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\,\theta}$$

qabul qilinib, uning parametrlariga bog'liq holda konikalarning barcha turlari tavsiflandi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, eksentrisitet $e$konikaning asosiy invariant parametri bo'lib xizmat qiladi, uning qiymati egri chiziqning geometrik turini to'liq aniqlaydi, ya'ni $0 < e < 1$ bo'lganda yopiq egri chiziq hosil bo'lib, bu ellipsga mos keladi, $e = 1$ holatda chegara konfiguratsiya yuzaga kelib parabola hosil bo'ladi, $e > 1$ bo'lganda esa ochiq egri chiziq paydo bo'lib giperbola aniqlanadi.

Analitik tahlil davomida radius-vektorning burchakka bog'liqligi o'rganilib, funksiyaning ekstremal qiymatlari aniqlashtirildi, bunda $\cos\,\theta = \pm 1$holatlar uchun quyidagi natijalar olindi: $r_{\min} = \frac{p}{1+e}, r_{\max} = \frac{p}{1-e}$ bu natijalar ellips uchun chegaralanganlikni, giperbola uchun esa ayrim yo'nalishlarda cheksiz o'sishni ifodalaydi.

Tadqiqot davomida yana bir muhim xulosa olindi, ya'ni konikaning shakli fokusga nisbatan aniqlanadi va barcha nuqtalar fokusdan o'lchanadigan masofalar orqali tavsiflanadi, bu esa qutb koordinatalarning geometrik mazmunini chuqur ochib beradi. Natijalarda quyidagi muhim bog'lanish aniqlandi:

$$r(1 + e\cos\,\theta) = p$$

bu tenglama konikaning har bir nuqtasi uchun fokusga nisbatan masofa va burchak o'rtasidagi aniq bog'lanishni ifodalaydi.

Shuningdek, simmetriya xossalari ham aniqlashtirildi, ya'ni $\cos\theta$funksiyaning juftligi sababli egri chiziq qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lishi ko'rsatildi, bu esa konikani qurishda muhim rol o'ynaydi. Natijalarda konikalarni Dekart koordinatalar bilan bog'lovchi muhim xulosa ham olindi, ya'ni qutb tenglamadan foydalanib klassik kvadratik tenglamaga o'tish mumkinligi asoslandi, bu esa ikki xil koordinatalar tizimi o'rtasidagi uzviy bog'liqlikni ko'rsatadi.

Teorema (qutb koordinatalarda konikalarni tavsiflash prinsipi): Har qanday ikkinchi tartibli chiziq fokusga nisbatan qutb koordinatalarda yagona parametrik tenglama orqali ifodalanadi va uning turi eksentrisitet orqali aniqlanadi.

Natijalarda quyidagi strukturaviy model taklif qilindi:

$$(e, p) \;\Rightarrow\; r(\theta) \;\Rightarrow\; \text{konika turi}$$

Bu model orqali parametrlar va geometrik shakl o'rtasidagi bog'lanish aniq ifodalandi.

Umuman olganda, olingan natijalar qutb koordinatalar tizimi konikalarni yagona tenglama orqali ifodalash, ularning xossalarini tahlil qilish va geometrik mazmunini ochib berishda samarali va universal vosita ekanligini ko'rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar ikkinchi tartibli chiziqlarni qutb koordinatalarda ifodalash nafaqat analitik jihatdan qulay, balki geometrik mazmunni ham bevosita ochib berishini ko'rsatdi, bunda fokus markaziy rol o'ynab, egri chiziqning barcha nuqtalari aynan shu nuqtaga nisbatan tavsiflanadi, bu esa Dekart koordinatalardagi tasvirdan tubdan farq qiladi.

Muhokamada aniqlanishicha, $r = \frac{p}{1+e\cos\,\theta}$ tenglama konikaning ichki tuzilishini to'liq ifodalaydi, chunki radius-vektor $r$ning burchakka bog'liqligi egri chiziqning shaklini aniqlaydi, eksentrisitet $e$esa bu shaklning "cho'zilganlik darajasi"ni belgilaydi.

Eksentrisitetning geometrik talqini ayniqsa muhim boʻlib, $e$ning kichik qiymatlarida egri chiziq fokus atrofida zichlashishi, $e$ortgani sari egri chiziq choʻzilib borishi, $e = 1$da esa oʻtish holati yuzaga kelishi kuzatildi, bu esa konikalar oʻrtasidagi uzviy bogʻliqlikni koʻrsatadi.

Muhokamada funksiyaning xatti-harakati ham tahlil qilindi, yaʼni θoʻzgarganda $r$ning qanday oʻzgarishi egri chiziqning shaklini hosil qiladi, ayrim yoʻnalishlarda $r$maksimal qiymatga erishishi, ayrim holatlarda esa keskin oʻsishi yoki kamayishi egri chiziqning global xossalarini belgilaydi.

Qutb koordinatalarning eng muhim afzalliklaridan biri shundaki, ular konikalarni tabiiy fizik modellar bilan bogʻlash imkonini beradi, xususan astronomiyada sayyoralar harakati aynan shu tenglama orqali ifodalanadi, bunda Quyosh fokusda joylashadi va sayyora trayektoriyasi ellips shaklida boʻladi, bu holat klassik mexanikada asosiy qonunlardan biri sifatida qaraladi.

Shuningdek, giperbolaning qutb tenglamasi fizikada ochiq trayektoriyalarni, masalan kosmik jismlarning uchib oʻtish yoʻllarini ifodalashda qoʻllaniladi, bu esa konikalar nazariyasining amaliy ahamiyatini koʻrsatadi. Muhokamada yana bir muhim jihat - qutb va Dekart koordinatalar oʻrtasidagi bogʻlanish hisoblanadi, yaʼni bir xil egri chiziq turli koordinatalarda turlicha koʻrinishga ega boʻlsa ham, uning geometrik mohiyati oʻzgarmaydi, bu esa matematik modellashtirishda muhim prinsip hisoblanadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari qutb koordinatalar tizimi konikalarni nafaqat matematik jihatdan, balki fizik va geometrik jihatdan ham chuqur tushunish imkonini beruvchi samarali vosita ekanligini koʻrsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalardagi tenglamalari, ularning analitik xossalari va geometrik talqini tizimli ravishda oʻrganildi, olingan natijalar konikalarni fokusga nisbatan ifodalash ularning ichki tuzilishini yanada aniqroq ochib berishini koʻrsatdi.

Analitik tahlil natijasida radius-vektorning burchakka bogʻliqligi, uning ekstremal qiymatlari va simmetriya xossalari aniqlashtirildi, bu esa egri chiziqlarning shaklini toʻliq tushunish imkonini berdi.

Shuningdek, qutb va Dekart koordinatalar oʻrtasidagi bogʻlanish oʻrganilib, bir xil geometrik obyekt turli koordinatalar tizimida ifodalanishi mumkinligi, ammo uning mohiyati oʻzgarmasligi koʻrsatildi. Umuman olganda, olingan natijalar qutb koordinatalar tizimi ikkinchi tartibli chiziqlarni oʻrganishda universal va samarali matematik vosita ekanligini koʻrsatdi, ushbu yondashuv astronomiya, optika va mexanikada keng qoʻllanish imkoniyatiga ega.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. George B. Thomas – Calculus and Analytic Geometry
2. Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2010). Thomas' Calculus (13th ed.). Pearson Education.
3. Saparboyev J.Y. (2024). Oʻquvchilarning amaliy faoliyatida fazoviy tasavvurini rivojlantirish mexanizmlari. Eurasian Journal of Academic Research, 7 (Special Issue), 631-633.
4. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
5. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

6. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
7. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
8. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
9. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
10. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
11. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
12. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
13. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
14. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.
15. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424