

KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

Boqiyeva Bahora Dilshod qizi

Matematika va Informatika fani o'qituvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21152084>

Annotatsiya. Ushbu maqolada kompleks sonlar tushunchasi, ularning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli (Eylar) shakllari hamda ular ustida bajariladigan asosiy amallar — qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildizdan chiqarish batafsil tahlil qilingan. Kompleks tekislik (Gauss tekisligi) yordamida kompleks sonlarni geometrik talqin qilish, Muavr formulasi va Eylar formulasining tatbiqlari ko'rib chiqilgan. Tadqiqotda nazariy tahlil, qiyoslash va misollar yechish usullaridan foydalanilib, kompleks sonlar nazariyasi yaxlit tizim sifatida tavsiflangan. Olingan natijalar kompleks sonlar nazariyasini oliy ta'lim jarayonida o'qitishda hamda muhandislik, fizika va texnika sohalarining amaliy masalalarini yechishda samarali qo'llash mumkinligini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: kompleks son, mavhum birlik, algebraik shakl, trigonometrik shakl, modul, argument, Muavr formulasi, Eylar formulasi, kompleks tekislik.

Annotation. This article provides a detailed analysis of the concept of complex numbers, their algebraic, trigonometric and exponential (Euler) forms, as well as the basic operations performed on them — addition, subtraction, multiplication, division, exponentiation and root extraction. The geometric interpretation of complex numbers by means of the complex plane (Gauss plane), De Moivre's formula and applications of Euler's formula are considered. Using the methods of theoretical analysis, comparison and problem solving, the theory of complex numbers is described as an integrated system. The obtained results show that the theory of complex numbers can be effectively applied both in teaching within higher education and in solving practical problems in the fields of engineering, physics and technology.

Keywords: complex number, imaginary unit, algebraic form, trigonometric form, modulus, argument, De Moivre's formula, Euler's formula, complex plane.

Аннотация. В настоящей статье подробно проанализировано понятие комплексных чисел, их алгебраическая, тригонометрическая и показательная (Эйлера) формы, а также основные действия, выполняемые над ними, — сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Рассмотрены геометрическая интерпретация комплексных чисел с помощью комплексной плоскости (плоскости Гаусса), формула Муавра и приложения формулы Эйлера. С использованием методов теоретического анализа, сравнения и решения задач теория комплексных чисел описана как целостная система. Полученные результаты показывают, что теория комплексных чисел может эффективно применяться как при обучении в системе высшего образования, так и при решении практических задач в области инженерии, физики и техники.

Ключевые слова: комплексное число, мнимая единица, алгебраическая форма, тригонометрическая форма, модуль, аргумент, формула Муавра, формула Эйлера, комплексная плоскость.

Kirish. Matematika fanining rivojlanish tarixida sonlar tushunchasi bosqichma-bosqich kengayib borgan. Dastlab natural sonlar, so'ngra butun, ratsional va irratsional sonlar, ya'ni haqiqiy sonlar to'plami shakllangan. Biroq haqiqiy sonlar to'plami ba'zi oddiy tenglamalarni yechish uchun

ham yetarli emas edi. Masalan, $x^2 + 1 = 0$ tenglamasi haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas, chunki hech qanday haqiqiy sonning kvadrati manfiy bo'la olmaydi. Aynan mana shunday muammolar sonlar to'plamini yanada kengaytirish, ya'ni kompleks sonlar to'plamini kiritish zaruratini keltirib chiqardi.

Kompleks sonlarga oid dastlabki g'oyalar XVI asrda uchinchi darajali tenglamalarni yechish jarayonida yuzaga kelgan. Italiyalik matematiklar J. Kardano va R. Bombelli manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarishga to'g'ri keladigan holatlarni tadqiq qildilar. Keyinchalik R. Dekart bunday miqdorlarni «mavhum» (imaginar) sonlar deb atadi. L. Eyler mavhum birlikni «i» harfi bilan belgilashni taklif etib, $i^2 = -1$ munosabatini asos qilib oldi va kompleks sonlar nazariyasiga muhim hissa qo'shdi. K. Gauss esa kompleks sonlarning geometrik talqinini, ya'ni ularni tekislik nuqtalari bilan bog'lashni ishlab chiqdi. Shu tariqa kompleks sonlar matematikaning to'laqonli va mustaqil bo'limiga aylandi.

Hozirgi kunda kompleks sonlar nafaqat sof matematikada, balki tabiiy va texnik fanlarda ham keng qo'llaniladi. Elektrotexnika va radiotexnikada o'zgaruvchan tok zanjirlarini hisoblashda, signallarni qayta ishlashda, gidrodinamika, kvant mexanikasi va boshqa sohalarida kompleks sonlar apparati muhim vosita hisoblanadi. Shu bois kompleks sonlar va ular ustida bajariladigan amallarni chuqur o'rganish oliy ta'lim tizimida matematik tayyorgarlikning ajralmas qismidir. Ushbu maqolaning maqsadi kompleks sonlar tushunchasini, ularning turli shakllarini va ular ustidagi amallarni tizimli ravishda yoritib berishdan iborat.

Mavzuga oid adabiyotlar tahlili. Kompleks sonlar nazariyasi oliy matematika, algebra va matematik analiz kurslarining fundamental bo'limlaridan biri sifatida ko'plab o'quv adabiyotlarida yoritilgan. Milliy o'quv adabiyotlarida ushbu mavzu turli yondashuvlar asosida bayon etilgan bo'lib, ular kompleks sonlarni algebraik, geometrik va analitik nuqtai nazardan tavsiflaydi.

T. Azlarov va H. Mansurovning oliy matematika bo'yicha darsligida [1] kompleks sonlar to'plamining tuzilishi, algebraik amallar va trigonometrik shakl asosiy e'tibor markazida bo'lib, nazariy bayon ko'plab misollar bilan mustahkamlangan. Ya. S. Bugrov va S. M. Nikolskiyning o'zbek tiliga tarjima qilingan darsligida [2] kompleks sonlarning geometrik talqini hamda Muavr va Eyler formulalariga alohida bo'lim ajratilgan. A. S. Sadullayevning matematik analiz asoslariga oid asarida [3] kompleks o'zgaruvchining funksiyalari kontekstida kompleks sonlarga tayanch ma'lumotlar berilgan.

Sh. A. Ayupov va hammualliflarning algebra va sonlar nazariyasiga oid qo'llanmasida [4] kompleks sonlar maydonining algebraik xossalari, jumladan, algebraning asosiy teoremasi bilan bog'liqligi ochib berilgan. Yuqori sinf o'quvchilari va abituriyentlar uchun mo'ljallangan qo'llanmalarda [5, 6] esa kompleks sonlar ustida amallarni bajarishning amaliy usullariga va tipik masalalarni yechish namunalari urg'u berilgan. G. Xudoyberganov va uning hammualliflarining matematik analiz kursida [7] hamda I. Isroilov va Z. Pashayevning o'quv qo'llanmasida [8] kompleks sonlarning ko'rsatkichli shakli va uni tatbiq etish masalalari batafsil bayon etilgan.

Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, aksariyat manbalarda kompleks sonlar nazariyasi alohida bo'limlar ko'rinishida — ta'rif, shakllar va amallar tarzida — ketma-ket bayon qilinadi. Ammo bu bo'limlarni yaxlit, o'zaro bog'liq tizim sifatida taqdim etuvchi, turli shakllar orasidagi o'tishlarni va ular ustidagi amallarni qiyosiy tarzda umumlashtiruvchi materiallar nisbatan kam uchraydi [9, 10]. Ushbu maqolada aynan shu yondashuv asos qilib olindi.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqot nazariy-analitik xarakterga ega bo'lib, unda quyidagi ilmiy usullardan foydalanildi. Birinchidan, mavzuga oid o'quv va ilmiy adabiyotlarni o'rganish hamda tahlil qilish usuli qo'llanildi; bu kompleks sonlar nazariyasining asosiy tushunchalari va

ularning bayon etilish uslublari aniqlashga imkon berdi. Ikkinchidan, deduktiv usul asosida umumiy ta'riflardan xususiy natijalar va formulalar keltirib chiqarildi.

Uchinchidan, qiyosiy tahlil usulidan foydalanib, kompleks sonlarning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari o'zaro solishtirildi hamda har bir amal uchun eng qulay shakl belgilandi. To'rtinchidan, matematik isbotlash va formulalarni asoslash usuli qo'llanilib, Muavr formulasi va ildizdan chiqarish formulasi kabi asosiy natijalar keltirib chiqarildi. Nihoyat, olingan nazariy natijalarni mustahkamlash maqsadida aniq sonli misollarni yechish usulidan foydalanildi. Ushbu usullarning uyg'unligi kompleks sonlar mavzusini yaxlit va izchil bayon etish imkonini berdi.

Natija va muhokama. Kompleks son deb $z = a + bi$ ko'rinishidagi ifodaga aytiladi, bu yerda a va b — haqiqiy sonlar, i esa mavhum birlik bo'lib, u quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$i^2 = -1.$$

Bunda a soni kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va $\text{Re}(z)$ ko'rinishida, b soni esa mavhum qismi deyiladi va $\text{Im}(z)$ ko'rinishida belgilanadi. $z = a + bi$ yozuvi kompleks sonning algebraik shakli deb ataladi. Agar $b = 0$ bo'lsa, $z = a$ haqiqiy songa aylanadi; agar $a = 0$ va $b \neq 0$ bo'lsa, $z = bi$ sof mavhum son deyiladi. Demak, haqiqiy sonlar to'plami kompleks sonlar to'plamining qism to'plami hisoblanadi.

Ikki kompleks son $a + bi$ va $c + di$ o'zaro teng bo'lishi uchun ularning haqiqiy va mavhum qismlari mos ravishda teng bo'lishi, ya'ni $a = c$ va $b = d$ bo'lishi zarur va yetarli. $z = a + bi$ soniga qo'shma bo'lgan kompleks son $\bar{z} = a - bi$ ko'rinishida aniqlanadi va u ko'plab amallarda muhim rol o'ynaydi.

Kompleks sonlar ustida algebraik amallar

Aytaylik, $z_1 = a + bi$ va $z_2 = c + di$ ikkita kompleks son berilgan bo'lsin. Qo'shish va ayirish amallari haqiqiy va mavhum qismlarni alohida qo'shish yoki ayirish orqali bajariladi:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Ko'paytirish amali oddiy ko'phadlarni ko'paytirish qoidasi bo'yicha, $i^2 = -1$ munosabatini hisobga olgan holda amalga oshiriladi:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Bo'lish amalini bajarish uchun kasrning surat va maxrajini maxrajga qo'shma bo'lgan songa ko'paytiriladi. Natijada maxraj haqiqiy songa aylanadi:

$$z_1 / z_2 = (ac + bd)/(c^2 + d^2) + [(bc - ad)/(c^2 + d^2)]i, \quad (z_2 \neq 0).$$

Bu yerda $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ tenglik muhim ahamiyatga ega, chunki u kompleks sonni haqiqiy songa aylantiradi va aynan shu xossa bo'lish amalining asosini tashkil etadi.

1-misol. $z_1 = 3 + 2i$ va $z_2 = 1 - 4i$ sonlari uchun asosiy amallarni bajaramiz. Yig'indi: $z_1 + z_2 = 4 - 2i$. Ayirma: $z_1 - z_2 = 2 + 6i$. Ko'paytma: $z_1 \cdot z_2 = (3 \cdot 1 - 2 \cdot (-4)) + (3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1)i = 11 - 10i$. Bo'linma esa quyidagicha topiladi:

$$z_1 / z_2 = (3 + 2i)/(1 - 4i) = (-5 + 14i)/17 = -5/17 + (14/17)i.$$

Kompleks tekislik va geometrik talqin

Har bir $z = a + bi$ kompleks soniga tekislikdagi koordinatalari $(a; b)$ bo'lgan yagona M nuqtani mos qo'yish mumkin. Bunday tekislik kompleks tekislik yoki Gauss tekisligi deb ataladi. Uning absissa o'qi haqiqiy o'q, ordinata o'qi esa mavhum o'q deyiladi. Shu tariqa kompleks sonlar geometrik ravishda tekislik nuqtalari yoki koordinata boshidan chiquvchi radius-vektorlar sifatida tasvirlanadi.

Kompleks sonni ifodalovchi vektorning uzunligi sonning moduli deyiladi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ushbu vektor bilan haqiqiy o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak sonning argumenti deyiladi va $\arg(z) = \varphi$ ko'rinishida belgilanadi. Argument uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\cos \varphi = a/r, \quad \sin \varphi = b/r, \quad \operatorname{tg} \varphi = b/a \quad (a \neq 0).$$

Argument cheksiz ko'p qiymatga ega bo'lib, ular bir-biridan 2π ning karralicha farq qiladi. $(-\pi; \pi]$ yoki $[0; 2\pi)$ oralig'iga tegishli qiymat argumentning bosh qiymati deyiladi. Modul va argument tushunchalari kompleks sonning boshqa shakllariga o'tishda asosiy rol o'ynaydi.

Trigonometrik va ko'rsatkichli shakllar

$a = r \cos \varphi$ va $b = r \sin \varphi$ munosabatlaridan foydalanib, kompleks sonni trigonometrik shaklda yozish mumkin:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Mashhur Eyler formulasi $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ni qo'llagan holda esa kompleks son ko'rsatkichli (Eyler) shaklda ifodalanadi:

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Ko'rsatkichli shakl ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildizdan chiqarish amallarini nihoyatda soddalashtiradi. Masalan, trigonometrik shaklda ikki kompleks sonni ko'paytirganda ularning modullari ko'paytiriladi, argumentlari esa qo'shiladi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

2-misol. $z = 1 + i$ sonini trigonometrik shaklga keltiramiz. Bunda $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ va $\varphi = \pi/4$, shu bois $z = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ yoki $z = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ bo'ladi.

Darajaga ko'tarish: Muavr formulasi

Kompleks sonni natural darajaga ko'tarish uchun trigonometrik shakl eng qulay hisoblanadi. Bu holatda mashhur Muavr formulasidan foydalaniladi:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ushbu formulaga ko'ra, kompleks sonni n -darajaga ko'tarishda uning moduli n -darajaga ko'tariladi, argumenti esa n marta orttiriladi. Muavr formulasi trigonometriyada ko'p karrali burchaklar uchun formulalarni keltirib chiqarishda ham keng qo'llaniladi.

3-misol. $(1 + i)^8$ ni hisoblaymiz. Yuqorida topilganidek, $1 + i = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$. Muavr formulasiga ko'ra:

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos(8\pi/4) + i \sin(8\pi/4)) = 16 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16.$$

Ildizdan chiqarish

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks sonining n -darajali ildizi n ta har xil qiymatga ega bo'lib, ular quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} [\cos((\varphi + 2\pi k)/n) + i \sin((\varphi + 2\pi k)/n)],$$

$$\text{bu yerda } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ushbu formuladan ko'rinadiki, kompleks sonning n -darajali barcha ildizlari moduli $\sqrt[n]{r}$ ga teng bo'lgan aylanada joylashadi va bu aylanani teng n bo'lakka bo'luvchi to'g'ri n burchakning uchlarini tashkil etadi. Bu esa kompleks sonlarning geometrik go'zalligini yaqqol namoyon etadi.

4-misol. $z^3 = 1$ tenglamaning barcha yechimlarini, ya'ni birdan uchinchi darajali ildizlarni topamiz. Bunda $1 = \cos 0 + i \sin 0$, $r = 1$. Formulaga ko'ra $k = 0, 1, 2$ uchun quyidagi uchta ildiz hosil bo'ladi:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i, \quad z_2 = -1/2 - (\sqrt{3}/2)i.$$

Bu uchta nuqta birlik aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning uchlarini tashkil etadi, bu esa yuqorida keltirilgan geometrik xossani tasdiqlaydi.

Kompleks sonlar shakllarining qiyosiy tahlili

Quyidagi jadvalda kompleks sonlarning uch shakli va ular har bir amal uchun qanchalik qulayligi umumlashtirilgan (1-jadval).

Shakl	Yozuvi	Qulay amallar
Algebraik	$z = a + bi$	Qo'shish, ayirish
Trigonometrik	$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$	Ko'paytirish, bo'lish, daraja, ildiz
Ko'rsatkichli	$z = re^{i\varphi}$	Barcha ko'paytmali amallar, tahlil

1-jadval. Kompleks sonlar shakllarining qiyosiy tahlili

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, qo'shish va ayirish amallari algebraik shaklda, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va ildizdan chiqarish amallari esa trigonometrik hamda ko'rsatkichli shaklda ancha qulay bajariladi. Shuning uchun masala yechishda dastlab qaysi amal talab qilinishini aniqlab, unga eng mos keluvchi shaklni tanlash maqsadga muvofiqdir. Ayniqsa, Eyler formulasi orqali ifodalanuvchi $e^{i\pi} + 1 = 0$ tengligi matematikaning eng go'zal munosabatlaridan biri sifatida kompleks sonlarning fundamental ahamiyatini ko'rsatadi.

Xulosa. Ushbu maqolada kompleks sonlar tushunchasi, ularning uch xil shakli va bu shakllar ustida bajariladigan asosiy amallar tizimli tarzda tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari asosida quyidagi xulosalarga kelindi. Birinchidan, kompleks sonlar haqiqiy sonlar to'plamining tabiiy kengaytmasi bo'lib, ular manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish va istalgan algebraik tenglamani yechish imkonini beradi. Ikkinchidan, kompleks sonning algebraik, trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari o'zaro ekvivalent bo'lib, har biri muayyan amallar uchun o'ziga xos qulaylik yaratadi.

Uchinchidan, qo'shish va ayirish amallari algebraik shaklda, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish hamda ildizdan chiqarish amallari esa trigonometrik va ko'rsatkichli shakllarda samaraliroq bajariladi; bunda Muavr va Eyler formulalari markaziy o'rin egallaydi. To'rtinchidan, kompleks sonlarning kompleks tekislikdagi geometrik talqini ular ustidagi amallarni ko'rgazmali tushuntirishga xizmat qiladi. Umuman olganda, kompleks sonlar nazariyasini yaxlit tizim sifatida o'zlashtirish oliy ta'lim jarayonida matematik tafakkurni rivojlantiradi hamda muhandislik, fizika va texnika sohalaridagi amaliy masalalarni yechish uchun mustahkam poydevor yaratadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Azlarov T., Mansurov H. *Matematik analiz. 1-qism.* — Toshkent: O'zbekiston, 2005. — 416 b.
2. Bugrov Ya. S., Nikolskiy S. M. *Oliy matematika. Analitik geometriya va chiziqli algebra elementlari.* — Toshkent: O'qituvchi, 1990. — 288 b.
3. Sadullayev A. S. *Matematik analiz asoslari.* — Toshkent: Universitet, 2012. — 352 b.
4. Ayupov Sh. A., Rahimov I. S., Xudoynazarov Q. *Algebra va sonlar nazariyasi.* — Toshkent: Fan va texnologiya, 2015. — 304 b.
5. Yunusova D. I., Yunusov A. S. *Oliy matematika masalalar to'plami.* — Toshkent: Iqtisod-moliya, 2018. — 268 b.
6. Soatov Yo. U. *Oliy matematika. 1-jild.* — Toshkent: O'qituvchi, 1994. — 456 b.
7. Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T. *Matematik analiz kursi.* — Toshkent: Voris-nashriyot, 2010. — 512 b.

8. Isroilov I., Pashayev Z. *Matematika. Kompleks sonlar va ularning tatbiqlari*. — Toshkent: Turon-Iqbol, 2016. — 196 b.
9. Nazarov R. N., Toshpo'latov B. T., Do'simbetov A. D. *Algebra va sonlar nazariyasi*. — Toshkent: O'qituvchi, 1993. — 384 b.
10. Toshmatov E., Rasulov A. *Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami*. — Toshkent: Cho'lpon, 2019. — 240 b.