

KVADRATUR FORMULALARNI QURISHDA Φ -FUNKSIYALAR USULINING NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY QO‘LLANILISHI

Li Olga Anatolevna

Osiyo Xalqaro Universiteti

70540101 - “Matematika” mutaxassisligi magistranti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20826801>

Annotatsiya: Ushbu maqolada kvadratur formulalarni qurishda Φ -funktsiyalar usulining nazariy asoslari hamda uning amaliy qo‘llanilishi o‘rganilgan. Φ -funktsiyalar usulining matematik mohiyati, kvadratur formulalarni hosil qilishdagi o‘rni va ularning algebraik aniqlik darajasini oshirishdagi ahamiyati tahlil qilingan. Kvadratur formulalarning og‘irlik koeffitsiyentlarini aniqlashda Φ -funktsiyalardan foydalanish algoritmi bayon etilgan hamda hosil qilingan formulalarning xatolik hadi nazariy jihatdan asoslab berilgan. Shuningdek, taklif etilgan usul asosida ayrim aniq va murakkab integrallarni sonli hisoblash natijalari klassik kvadratur formulalar bilan taqqoslangan.

Kalit so‘zlar: kvadratur formulalar, Φ -funktsiyalar usuli, sonli integrallash, algebraik aniqlik darajasi, qoldiq had, interpolatsiya, integral hisoblash.

Kirish

Zamonaviy hisoblash matematikasida aniq integral qiymatini topish masalasi muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega. Ko‘plab fizik, texnik, iqtisodiy va axborot texnologiyalariga oid masalalar integral ifodalarni hisoblashga olib keladi. Biroq amaliyotda uchraydigan funksiyalarning barchasi ham boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lavermaydi yoki ularni analitik usulda integrallash murakkab bo‘ladi. Shu sababli sonli integrallash usullari, xususan, kvadratur formulalar hisoblash matematikasining asosiy yo‘nalishlaridan biri sifatida shakllangan.

Kvadratur formulalar yordamida aniq integral qiymati funksiyaning chekli sondagi nuqtalardagi qiymatlari orqali taqribiy hisoblanadi. Bunday yondashuv hisoblash jarayonini soddalashtiradi, integrallashni algoritmik ko‘rinishga keltiradi va kompyuter texnologiyalarida samarali qo‘llash imkonini beradi. Klassik to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiyalar, Simpson, Nyuton–Kotes va Gauss kvadratur formulalari bugungi kunda keng qo‘llanilayotgan usullardandir. Har bir formula o‘zining aniqlik darajasi, tugunlar tanlanishi, og‘irlik koeffitsiyentlari va xatolik bahosi bilan tavsiflanadi. Shu bilan birga, ilmiy-texnik masalalarning murakkablashuvi yuqori aniqlikka ega, barqaror va samarali kvadratur formulalarni qurishni talab etmoqda. Ayniqsa, silliqdagi turlicha bo‘lgan funksiyalar, maxsus og‘irlik funksiyalari ishtirok etgan integrallar yoki murakkab sohalarda aniqlangan integrallar uchun an‘anaviy kvadratur formulalar yetarli darajada samarali bo‘lmasligi mumkin. Bunday hollarda kvadratur formulalarni qurishning yangi nazariy yondashuvlari muhim ahamiyat kasb etadi.

Ana shunday yondashuvlardan biri Φ -funktsiyalar usulidir. Φ -funktsiyalar usuli kvadratur formulalarni qurishda yordamchi funksiyalar tizimidan foydalanishga asoslanadi. Bu usul orqali integralni taqribiy hisoblash formulasi maxsus tanlangan funksiyalar xossalari yordamida hosil qilinadi. Φ -funktsiyalar kvadratur formula tugunlari, og‘irlik koeffitsiyentlari va aniqlik shartlarini ifodalashda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Ushbu usulning afzalligi shundaki, u kvadratur formulalarni nazariy jihatdan asoslash, xatolik hadini baholash va formulalarning aniqlik darajasini oshirish imkonini beradi.

Φ -funktsiyalar usulining nazariy mohiyati shundaki, integral ostidagi funksiya ma‘lum funksiyalar sinfi doirasida qaraladi va kvadratur formula shu sinfdagi funksiyalar uchun imkon

qadar aniq natija beradigan qilib quriladi. Bunda tanlangan φ -funktsiyalar tizimi integralning xususiyatlarini aks ettiradi hamda og'irlik koeffitsiyentlarini aniqlashda asosiy rol o'ynaydi. Natijada klassik usullarga nisbatan moslashuvchanroq va ayrim hollarda yuqori aniqlikka ega formulalarni hosil qilish mumkin bo'ladi.

Muhokama

Kvadratur formulalarni qurishda φ -funktsiyalar usulidan foydalanish sonli integrallash nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo'lgan yondashuvlardan biri sifatida qaraladi. Chunki an'anaviy kvadratur formulalar, odatda, ko'phadlar fazosida aniqlik shartlarini qanoatlantirishga asoslanadi. φ -funktsiyalar usuli esa bu yondashuvni yanada umumlashtirib, integral ostidagi funktsiyaning xususiyatlarini maxsus tanlangan yordamchi funktsiyalar orqali ifodalash imkonini beradi. Natijada kvadratur formula faqat standart polinomlar uchun emas, balki muayyan funksional sinflar uchun ham moslashtirilgan holda quriladi.

Ushbu usulning muhim jihati shundaki, φ -funktsiyalar kvadratur formulalarning tugunlari va og'irlik koeffitsiyentlarini aniqlashda nazariy asos vazifasini bajaradi. Agar klassik formulalarda tugunlar ko'pincha oldindan belgilangan yoki maxsus ortogonal ko'phadlar ildizlari orqali aniqlansa, φ -funktsiyalar usulida tugunlar va koeffitsiyentlar tanlangan funktsiyalar tizimi bilan bog'liq shartlardan kelib chiqadi. Bu esa kvadratur formulani aniq masala talablariga moslashtirish imkonini beradi.

Muhokama jarayonida e'tibor qaratish lozim bo'lgan asosiy masalalardan biri — kvadratur formulaning aniqlik darajasidir. Har qanday kvadratur formula uchun uning qaysi funktsiyalar sinfiga aniq natija berishi muhim hisoblanadi. φ -funktsiyalar usulida aniqlik shartlari φ -funktsiyalar tizimi orqali belgilanadi. Agar formula tanlangan φ -funktsiyalar uchun integralni xatosiz hisoblay olsa, u holda ushbu formula shu funktsiyalar sinfiga nisbatan aniq deb qaraladi. Bu holat klassik algebraik aniqlik tushunchasini kengaytiradi va kvadratur formulalarning amaliy imkoniyatlarini oshiradi.

φ -funktsiyalar usulining yana bir afzalligi xatolik hadini tahlil qilish imkoniyatidir. Sonli integrallashda xatolik bahosi nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega. Chunki integralning taqribiy qiymati qanchalik ishonchli ekanini aniqlash uchun xatolik chegarasini bilish zarur. φ -funktsiyalar asosida qurilgan kvadratur formulalarda xatolik integral ostidagi funktsiyaning tanlangan funktsiyalar tizimiga qanchalik yaqin ifodalanishi bilan bog'liq bo'ladi. Demak, φ -funktsiyalarni to'g'ri tanlash orqali xatolikni kamaytirish va hisoblash aniqligini oshirish mumkin.

Amaliy nuqtayi nazardan qaraganda, φ -funktsiyalar usuli murakkab integrallarni hisoblashda samarali vosita bo'lishi mumkin. Ayniqsa, integral ostidagi funktsiya oddiy polinomlar bilan yaxshi yaqinlashmaydigan hollarda maxsus φ -funktsiyalar tizimidan foydalanish yaxshi natija beradi. Masalan, eksponensial, trigonometrik, logarifmik yoki maxsus og'irlik funktsiyalariga ega integrallar uchun mos φ -funktsiyalar tanlansa, kvadratur formula an'anaviy usullarga nisbatan yuqoriroq aniqlik berishi mumkin. Shu bilan birga, φ -funktsiyalar usulini qo'llashda ayrim murakkabliklar ham mavjud. Birinchidan, φ -funktsiyalar tizimini tanlash masalasi har doim ham sodda emas. Tanlangan funktsiyalar integral ostidagi funktsiyaning asosiy xususiyatlarini aks ettirishi kerak. Agar φ -funktsiyalar noto'g'ri tanlansa, hosil qilingan kvadratur formula kutilgan aniqlikni bermasligi mumkin. Ikkinchidan, og'irlik koeffitsiyentlarini aniqlash uchun hosil bo'ladigan algebraik tenglamalar sistemasi ba'zan murakkab yoki yomon shartlangan bo'lishi mumkin. Bu esa hisoblash jarayonida qo'shimcha sonli muammolarni yuzaga keltiradi.

Biroq ushbu cheklanishlarga qaramay, φ -funktsiyalar usulining nazariy va amaliy ahamiyati yuqoridir. U kvadratur formulalarni qurishda yanada moslashuvchan yondashuvni ta'minlaydi. Bu

usul orqali integral ostidagi funksiyaning tabiatiga mos formula qurish mumkin bo‘ladi. Aynan shu jihat φ -funksiyalar usulini zamonaviy hisoblash matematikasida istiqbolli yo‘nalishlardan biriga aylantiradi.

Klassik kvadratur formulalar bilan taqqoslaganda, φ -funksiyalar usuli ko‘proq umumiylikka ega. Masalan, Nyuton–Kotes formulalari asosan teng masofali tugunlarga, Gauss formulalari esa ortogonal ko‘phadlar xossalriga asoslanadi. φ -funksiyalar usuli esa tanlangan funksiyalar tizimiga ko‘ra turli xil formulalarni hosil qilish imkonini beradi. Bu holat uni moslashuvchan va keng qo‘llaniladigan usul sifatida baholashga asos bo‘ladi.

Muhokama qilinayotgan mavzuning yana bir muhim tomoni — algoritmik realizatsiya masalasidir. Zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida φ -funksiyalar asosida kvadratur formulalarni qurish, og‘irlik koeffitsiyentlarini hisoblash va xatolikni baholash jarayonlarini dasturlash mumkin. MATLAB, Python, Maple yoki Mathematica kabi dasturiy vositalar ushbu jarayonlarni samarali amalga oshirish imkonini beradi. Bu esa φ -funksiyalar usulini nafaqat nazariy, balki amaliy hisoblashlar uchun ham qulay qiladi.

Sonli tajribalar nuqtayi nazaridan φ -funksiyalar usulining samaradorligini baholash uchun uni klassik kvadratur formulalar bilan taqqoslash maqsadga muvofiqdir. Bunda bir xil integral turli usullar yordamida hisoblanadi va olingan natijalar aniq qiymat yoki yuqori aniqlikdagi etalon natija bilan solishtiriladi. Agar φ -funksiyalar asosida qurilgan formula kamroq tugunlar sonida yuqori aniqlik bersa, bu usulning ustunligi amaliy jihatdan tasdiqlanadi.

Bundan tashqari, φ -funksiyalar usuli maxsus masalalarda ham qo‘llanishi mumkin. Masalan, differensial tenglamalarni sonli yechishda, integral tenglamalar nazariyasida, matematik fizika masalalarida, ehtimollar nazariyasida va statistik hisoblashlarda integrallarni aniq yoki taqribiy hisoblash zarur bo‘ladi. Bunday masalalarda yuqori aniqlikdagi kvadratur formulalardan foydalanish yechim sifatiga bevosita ta‘sir qiladi.

Nazariy asos

Kvadratur formulalar nazariyasi aniq integralni chekli sondagi qiymatlar orqali taqribiy hisoblash g‘oyasiga asoslanadi. Umumiy holda $([a,b])$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $(f(x))$ funksiya uchun integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

ko‘rinishida beriladi. Kvadratur formula esa ushbu integralni quyidagi chekli yig‘indi bilan almashtiradi:

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

bu yerda (x_k) lar — kvadratur tugunlari, (A_k) lar esa og‘irlik koeffitsiyentlari deyiladi. Asosiy masala shundan iboratki, (x_k) va (A_k) qiymatlari shunday tanlanadiki, $(Q_n(f))$ integralning haqiqiy qiymatiga imkon qadar yaqin bo‘lsin.

φ -funksiyalar usulida kvadratur formula qurish jarayoni maxsus tanlangan funksiyalar tizimiga tayangan holda amalga oshiriladi. Bunda

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$$

funksiyalar tizimi qaraladi. Ushbu funksiyalar integral ostidagi funksiyani ifodalash yoki unga yaqinlashtirish uchun asos sifatida olinadi. Agar kvadratur formula tanlangan φ -funksiyalar uchun aniq bajarilsa, ya'ni

$$\int_a^b \varphi_j(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k \varphi_j(x_k), \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

shartlar bajarilsa, u holda formula shu φ -funksiyalar tizimiga nisbatan aniq formula hisoblanadi.

Xulosa qilib aytganda, φ -funksiyalar usulining nazariy asosi kvadratur formulani maxsus funksiyalar tizimida aniqlik shartlarini qanoatlantiradigan qilib qurishdan iborat. Bu usul integralni oddiy mexanik yig'indi sifatida emas, balki funksional yaqinlashtirish nazariyasi bilan bog'langan holda qarash imkonini beradi. Shu jihatdan φ -funksiyalar usuli kvadratur formulalar nazariyasini umumlashtiruvchi va chuqurlashtiruvchi samarali matematik yondashuv hisoblanadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Hayotov A.R., Jeon S., Shadimetov Kh.M. Application of optimal quadrature formulas for reconstruction of CT images // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2021. – Vol. 388. – Art. 113313.
2. Hayotov A.R., Kuldoshev H.M. An Optimal Quadrature Formula with Sigma Parameter // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. – 2023. – Vol. 48, No. 2/1. – P. 7–19.
3. Coman Gh., Cuatinaş T. Construction of the Optimal Quadrature Formula Using the φ -Function Method // *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*. – 2024.
4. Hayotov A.R., Shomalikova M.Sh. An Optimal Quadrature Formula Exact to the Exponential Function // *Problems of Computational and Applied Mathematics*. – 2025. – Vol. 69, No. 5. – P. 74–85.
5. Hayotov A.R., Xaitov T., va boshq. On Optimality and Error Estimation of a Quadrature Formula by the φ -Function Technique // *International Journal of Analysis and Applications*. – 2025. – Vol. 23. – Art. 270.
6. Babaeva S.S., va boshq. Consecutive Optimization of the Weighted Quadrature Formula // *Filomat*. – 2025. – Vol. 39, No. 8.