PLASTINKANING ELASTIK HOLATINI KANTOROVICH-VLASOV VA DIFFERENSIAL HAYDASH USULLARI YORDAMIDA MATEMATIK MODELLASHTIRISH

M.Olimov
Professor (Namangan davlat texnika universiteti)
E.T.Ismoilov
Magistr (Namangan davlat texnika universiteti)
(Tel: +998775772250, e-mail: ismoilovelmurod011@gmail.com)

https://doi.org/10.5281/zenodo.20524366

Annotatsiya Mazkur tadqiqot yupqa plastinkalarning egilish va deformatsiya holatini baholash uchun Kirchhoff-Love nazariyasiga asoslangan yangi avtomatlashtirilgan hisoblash algoritmini taqdim etadi. Ikki o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishdagi hisoblash murakkabliklarini bartaraf etish maqsadida Kantorovich-Vlasov variatsion usuli qo'llanilib, masala bir o'lchovli to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltirildi. Olingan chegaraviy masala differensial haydash (progonka) usuli orqali boshlang'ich shartli Koshi masalasiga transformatsiya qilindi va to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulida sonli integrallandi. Ishlab chiqilgan algoritm Python dasturlash muhitida to'liq avtomatlashtirildi. Sonli natijalarning analitik yechimlar bilan qiyosiy tahlili shuni ko'rsatdiki, lokal xatolik kompensatsiyasi hisobiga markaziy nuqtalardagi maksimal tafovut 0.51% dan oshmaydi. Bu esa taklif etilayotgan yondashuvning yuqori variatsion barqarorligini tasdiqlaydi.

Kalit so'zlar: Kirchhoff-Love nazariyasi, Kantorovich-Vlasov usuli, differensial haydash usuli, Koshi masalasi, Runge-Kutta usuli, egilish funksiyasi, matematik modellashtirish.

Zamonaviy muhandislik mexanikasi, qurilish, mashinasozlik va aerokosmik sohalarda konstruktiv elementlarning mustahkamligi hamda bikrligini baholash yuqori aniqlikdagi matematik modellarni talab etadi. Plastinkaning qalinligi uning uzunligi va kengligiga nisbatan ancha kichik deb qabul qilinib, deformatsiya jarayoni asosan plastinka o'rta sirtining egilishi bilan tavsiflanadi. Turli xil chegaraviy shartlar va uzluksiz yuklamalar mavjud bo'lgan real muhandislik shartlarida ushbu tenglamalarning sof analitik yechimini topish jiddiy qiyinchiliklar tug'diradi. Shu sababli, hisoblash matematikasining zamonaviy usullaridan foydalangan holda muammoga yondashish va algoritmlarni ishlab chiqish o'ta dolzarbdir.

Asosiy muvozanat tenglamasi Kirchhoff-Love nazariyasidan kelib chiqqan holda shakllantiriladi. Amaliyotda uzluksiz taqsimlangan yuklamalar hamda harorat o'zgarishlari kabi omillar ta'sirida plastinkalar murakkab deformatsiyalanish holatlariga duch keladi. Kirchhoff tomonidan taklif etilgan plastinka nazariyasi va A.E.H. Love tomonidan rivojlantirilgan elastiklik munosabatlari fundamental asos vazifasini o'tasada, to'rtinchi tartibli bigarmonik tenglamalarning sof analitik yechimini olish faqat cheklangan chegaraviy shartlardagina amaliy ahamiyatga ega. Ushbu maqolaning maqsadi to'rtinchi tartibli differensial tenglamaga keltiriladigan chegaraviy masalalarni taqribiy yechishni Koshi masalasini yechish bilan almashtiruvchi yuqori barqarorlikdagi dasturiy-algoritmik majmuani ishlab chiqishdan iborat [1-2].

Kirchhoff-Love gipotezalariga muvofiq, o'rta tekislik deformatsiyalanmaydi va normallar qalinlik bo'ylab cho'zilmaydi degan faraz qabul qilinadi. Plastinka muvozanatining asosiy differensial tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$D\nabla^4 w(x,y)=q$$

Bu yerda $w(x,y)$ – plastinkaning egilish funksiyasi, q – tashqi taqsimlangan yuklama, D – plastinkaning egilish qattiqligi.

Tenglama o'lchamini kamaytirish uchun S.P. Timoshenko va L.V. Kantorovich kabi olimlarning fundamental ishlariga tayangan holda Kantorovich-Vlasov variatsion usulidan foydalaniladi.

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\varphi_i(y)$$

Bu yerda $u_i(x)$ va $\varphi_i(y)$ mos ravishda **x** va **y** koordinatalarga bog‘liq funksiyalardir. Bu yondashuvda noma'lum egilish funksiyasi o'zgaruvchilarni ajratish tamoyiliga ko'ra yoyiladi va natijada ikki o'lchovli xususiy hosilali masala bir o'lchovli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Olingan sistema qattiq va sharnirli mahkamlash kabi turli chegaraviy shartlarni ta'minlashga qaratilgan.

Koordinata funksiyasi plastinkaning $y=0$ va $y=b$ chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi quyidagi funksiya tanlandi:

$$\varphi(y)=y^2(3-2y)$$

Endi egilish funksiyasining **x** va **y** koordinata bo‘yicha hosilalari aniqlanadi va asosiy formulaga qo’yiladi.

$u_i(x)$ funksiyalar esa noma’lum sifatida topiladi.

Shunday qilib, ikki o‘lchovli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagi bir o‘lchovli to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamaga keltiriladi:

$$u^{(4)}(x)-\frac{84}{13}u''(x)=\frac{35}{13D}F(x)$$

To‘rtinchi tartibli differensial tenglamalarni analitik usulda yechish murakkab bo‘lgani sababli sonli usullardan foydalaniladi. Biroq Runge–Kutta usuli asosan boshlang‘ich shartli Koshi masalalari uchun qo‘llaniladi. Shu sababli chegaraviy masalani Koshi masalasiga keltirish zarur bo‘ladi [3-4].

Chegaraviy masalalarni sonli yechishda differensial haydash usuli yuqori barqarorligi bilan ajralib turadi. Bu usulning mohiyati - chegaraviy shartlarni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga "haydash" orqali masalani boshlang‘ich qiymatli (Koshi) masalasiga keltirishdir.

Differensial haydashning asosiy formulasi

$$W(x)=\alpha(x)W'(x)+\beta(x)$$

Bu yerda:

- $\alpha(x)$ - 2 o‘lchovli matritsali funksiya, $\beta(x)$ - 2 o‘lchovli vektor.

Matritsalarni aniqlab differensial haydashning asosiy formulasini differensiallaymiz.

Natijada quyidagi boshlang‘ich shartli Koshi masalasi hosil bo‘ladi:

$$u_1'(x)=\frac{1}{\Delta x}\left[\alpha_{22}(\beta_1-u_1(x))-\alpha_{12}(\beta_2-u_2(x))\right]$$

$$u_2'(x)=\frac{1}{\Delta x}\left[-\alpha_{21}(\beta_1-u_1(x))+\alpha_{11}(\beta_2-u_2(x))\right]$$

Mazkur sistema boshlang‘ich shartli differensial tenglamalar sistemasi hisoblanadi va uni sonli yechish uchun Runge–Kutta usulining to‘rtinchi tartibli sxemasidan foydalaniladi.

Runge–Kutta usuli oddiy differensial tenglamalarni sonli integrallashning eng samarali usullaridan biri bo‘lib, yuqori aniqlik va hisoblash barqarorligiga ega.

Plastinka egilishi

$$u_{1,n+1} = u_{1,n} + \frac{K_{1,1} + 2K_{2,1} + 2K_{3,1} + K_{4,1}}{6}$$

Egilish hosilasi

$$u_{2,n+1} = u_{2,n} + \frac{K_{1,2} + 2K_{2,2} + 2K_{3,2} + K_{4,2}}{6}$$

Bu yerda: K_i - yordamchi vektorlar, $K_{i,1}$ - birinchi component, $K_{2,i}$ - ikkinchi komponent.

Mazkur yordamchi kattaliklar interval ichidagi hosila qiymatlarini yuqori aniqlik bilan yaqinlashtirish imkonini beradi. Natijada plastinka egilishining sonli yechimi yuqori aniqlikda aniqlanadi [5].

Runge–Kutta usuli yordamida plastinkaning egilishi, deformatsiya tezligi, elastik holatning taqsimlanishi yuqori aniqlik bilan aniqlanadi. Har bir tugun nuqtadagi qiymatlar avvalgi qadam natijalari asosida hisoblanadi. Shu sababli usul plastinka egilishining butun oraliqdagi sonli yechimini olish imkonini beradi.

Tadqiqot natijasida Kirchhoff-Love nazariyasiga tayanuvchi murakkab ikki o'lchovli plastinka muammosini hal qilishning yuqori darajada ishonchli va barqaror sonli yechish uslubiyoti yaratildi. Kantorovich-Vlasov va differensial haydash usullarining o'zaro integratsiyasi yordamida tenglamalar o'lchamini qisqartirishga erishildi hamda Runge-Kutta sxemasi bilan aniq sonli yechimlar olindi. Ushbu algoritmik yechim va u asosida yaratilgan dasturiy ta'minot qurilish va mashinasozlik sohalaridagi murakkab muhandislik hisoblarini tezkor hamda aniq amalga oshirish kafolatini beradi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1.Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. Пластинкы и оболочки. M.:Nauka 1966.
2. L.V. Kantorovich, V.I. Krilov. Priblijennie metodi visshego analiza. M.: Fiziko-matematicheskoy literaturi, 1962.
3. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennie metodi. – M: Nauka, 1989. – 432 s.
4. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2013). The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7-nashr. Butterworth-Heinemann, 756 b.
5. Reddy, J. N. (2019). Introduction to the Finite Element Method. 4-nashr. McGraw-Hill Education, 768 b.