IKKI O‘LCHOVLI PARABOLIK TENGLAMANI AYIRMALI SXEMA YORDAMIDA SONLI YECHISH VA DASTURIY REALIZATSIYASI

Usmonova Zebo Egamvberdiyevna
FarDU 25-amaliy matematika mutaxassisligi 1-kurs talabasi
Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich
f.-m. f.b.f.d.(PhD)
https://doi.org/10.5281/zenodo.20352565

Annotatsiya. Mazkur maqolada ikki o‘lchovli konveksiya-diffuziya tenglamasini sonli usullar yordamida yechish masalasi ko‘rib chiqilgan. Tenglama diffuziya hadlari bilan birga $\partial u/\partial x$ ko‘rinishidagi konveksiya (adveksiya) hadini o‘z ichiga oladi, bu esa masalani klassik issiqlik tenglamasiga nisbatan murakkablroq qiladi. Tadqiqotda aniq (explicit) ayirmali sxema asosida tenglama diskretlashtirildi va Python hamda MATLAB muhitlarida dasturiy realizatsiya qilindi. Olingan natijalar grafik ko‘rinishda tahlil qilinib, usulning samaradorligi ko‘rsatildi.

Kalit so‘zlar: parabolik tenglama, issiqlik tenglamasi, ayirmali sxema, explicit sxema, sonli usullar, MATLAB, Python, modellashtirish.

Kirish. Issiqlik tarqalish va moddiy o‘tkazish jarayonlarini modellashtirish zamonaviy ilm-fan va texnologiyaning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Bunday jarayonlar energetika, qurilish, materialshunoslik, gidrodinamika va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llaniladi. Issiqlik almashinuvi va massa o‘tkazish jarayonlarini matematik tavsiflash uchun eng muhim modellardan biri - konveksiya-diffuziya tenglamasi bo‘lib, u parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sinfiga kiradi.

Ko‘p hollarda real fizik jarayonlar murakkab geometrik sohalarda va noaniq boshlang‘ich-chegaraviy shartlar ostida kechadi. Shu sababli bunday tenglamaning analitik yechimini topish amaliy jihatdan qiyin yoki imkonsiz bo‘ladi. Aynan shu holatda sonli usullar, xususan, ayirmali sxemalar muhim ahamiyat kasb etadi.

So‘nggi yillarda hisoblash texnikasining rivojlanishi natijasida xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish usullari keng rivojlandi. Ular orasida ayirmali sxemalar soddaligi, hisoblash samaradorligi va dasturiy realizatsiya qilish qulayligi bilan ajralib turadi. Ayniqsa, ikki o‘lchovli konveksiya-diffuziya tenglamasini yechishda aniq (explicit) sxemalar tezkor hisoblash imkonini beradi.

Shu bilan birga, konveksiya hadining mavjudligi sxemaning barqarorlik shartini qiyinlashtiradi. Diffuziya hadlaridan tashqari konveksiya uchun ham Kurant shartini hisobga olish zarur bo‘ladi. Shuning uchun sxemani qurishda uning barqarorligi, yaqinlashuvi va xatolik tahlili alohida e'tibor talab qiladi.

Mazkur ishning asosiy maqsadi - ikki o‘lchovli konveksiya-diffuziya tenglamasini aniq ayirmali sxema yordamida diskretlashtirish, uning barqarorlik va yaqinlashuv xossalarini tahlil qilish hamda Python va MATLAB muhitlarida dasturiy realizatsiyasini amalga oshirishdan iborat.

Tadqiqot vazifalari quyidagilardan iborat:

- ✓ ikki o‘lchovli konveksiya-diffuziya tenglamasining matematik modelini shakllantirish;
- ✓ konveksiya hadini hisobga olgan holda ayirmali sxema asosida diskret modelni qurish;
- ✓ sxemaning barqarorlik va yaqinlashuv shartlarini aniqlash;
- ✓ algoritm ishlab chiqish va uni dasturiy realizatsiya qilish;
- ✓ olingan natijalarni grafik ko‘rinishda tahlil qilish.

Shamol mavjud ochiq muhitda iflos moddaning (masalan, sanoat chiqindilari yoki tutun) diffuziya va konveksiya orqali tarqalishi modellanadi. Masala tekis, kvadrat shakldagi 1×1 km^2 hududda (normallashtirilgan koʻrinishda) qaraladi. Masala quyidagi sohada aniqlangan:

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1, \qquad t > 0$$

Konsentratsiya taqsimoti quyidagi diffuziya-konveksiya tenglamasi orqali ifodalanadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,y,t)$$

bu yerda, $f(x,y,t) = x + y + t$ - manba funksiyasi, $u(x,y,t)$ - ifloslantiruvchi modda konsentratsiyasi (mg/m^2 da).

Tenglama diffuziya hadlari $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ bilan birga $\frac{\partial u}{\partial x}$ konveksiya hadini oʻz ichiga oladi. Bu had x-oʻqi yoʻnalishi boʻylab bir tekis esayotgan shamolning iflos moddani shu yoʻnalishda tashishini ifodalaydi. $f(x,y,t) = x + y + t$ - sohada joylashgan tarqalib turuvchi ifloslik manbai funksiyasi (masalan, vaqt oʻtishi bilan kuchayuvchi sanoat zavodi chiqindisi).

Boshlangʻich shart hududdagi ifloslantiruvchi modda konsentratsiyasining dastlabki taqsimotini belgilaydi:

$$u(x,y,0) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Bu shart dastlabki paytda iflos modda sohaning markaziga toʻplangan va chegaralarda konsentratsiya nolga teng ekanligini ifodalaydi – ya'ni ifloslik manbai boshida markazda joylashgan.

Chegaraviy shartlar hududning barcha tomonlarida ifloslantiruvchi modda konsentratsiyasi qanday oʻzgarishini ifodalaydi:

$$u(x,0,t) = x(1-x)t,$$

$$u(x,1,t) = x(1-x)t,$$

$$u(0,y,t) = y(1-y)t,$$

$$u(1,y,t) = y(1-y)t.$$

Ushbu chegaraviy shartlarning fizik talqini quyidagicha:

- barcha chegara boʻylab ($x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$) konsentratsiya vaqt oʻtishi bilan asta-sekin ortadi - bu atrofdagi muhitdan ifloslikning yon tomonlarga sekin kirib kelishini bildiradi;
- chegara konsentratsiyasi mos koordinatada parabolik taqsimlangan - ikkala burchakda nol, oʻrtada maksimal; bu chegaraning markaziga yaqin joydan koʻproq ifloslik oʻtayotganini koʻrsatadi;
- t=0 da chegara konsentratsiyasi nolga teng boʻlib, vaqt oʻtishi bilan ifloslik manbai ta'sirida asta-sekin ortib boradi.

Mazkur tadqiqotning asosiy maqsadi tenglamani aniq ayirmali sxema yordamida diskretlashtirish, uning barqarorligini tahlil qilish hamda Python muhitida dasturiy realizatsiya qilishdan iborat.

Matematik model va ayirmali sxema.

Ikki o'lchovli soha bir xil qadamli to'rga ajratiladi:

$$x_i = ih, y_j = jh, t^n = n\tau$$

bu yerda: h - fazoviy qadam; τ - vaqt qadami.

Hosilalar markaziy ayirmalar yordamida approksimatsiya qilinadi.

Ikkinchi tartibli hosilalar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h^2}$$

vaqt bo'yicha hosila:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\tau}$$

Natijada explicit ayirmali sxema hosil bo'ladi:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n +$$

$$+\tau\left(\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h^2} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} + f(x_i, y_j, t^n)\right)$$

Explicit sxema uchun barqarorlik sharti quyidagicha tanlanadi:

$$\tau \le \frac{h^2}{4}$$

Mazkur shart bajarilganda sxema barqaror bo'ladi va sonli yechim divergensiyaga uchramaydi.

Ayirmali sxemaning yaqinlashuv tartibi: $O\left(\tau + h^2\right)$

Dasturiy realizatsiya: Masala Python va MATLAB muhitlarida realizatsiya qilindi.

Python dasturi

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Parametrlar
N = 20
h = 1/N
tau = h*h/4
M = 100
```

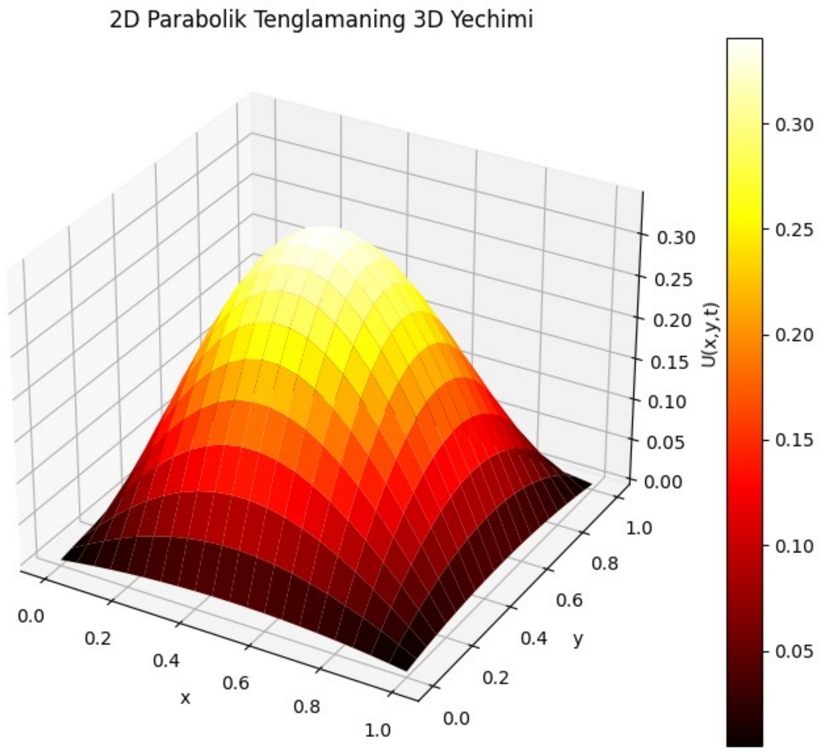
```
x = np.linspace(0,1,N+1)
y = np.linspace(0,1,N+1)

# Boshlang'ich matritsa
U = np.zeros((N+1,N+1))

# Boshlang'ich shart
for i in range(N+1):
    for j in range(N+1):
        U[i,j] = np.sin(np.pi*x[i]) * np.sin(np.pi*y[j])

# Vaqt bo'yicha hisoblash
for n in range(M):
    t = n * tau
    U_new = U.copy()

  # Chegaraviy shartlar
    for j in range(N+1):
        U_new[0,j] = y[j]*(1-y[j])*t
        U_new[N,j] = y[j]*(1-y[j])*t
    for i in range(N+1):
        U_new[i,0] = x[i]*(1-x[i])*t
        U_new[i,N] = x[i]*(1-x[i])*t

    # Ichki nuqtalar
    for i in range(1,N):
        for j in range(1,N):
            ux = (U[i+1,j] - U[i-1,j]) / (2*h)
            uxx = (U[i+1,j] - 2*U[i,j] + U[i-1,j]) / h**2
            uyy = (U[i,j+1] - 2*U[i,j] + U[i,j-1]) / h**2

            f = x[i] + y[j] + t

            U_new[i,j] = U[i,j] + tau*(uxx + uyy + ux + f)

    U = U_new

# ======================================
# 1. Jadval ko'rinishi
# ======================================

df = pd.DataFrame(U)

print("21x21 Sonli Yechim Jadvali:")
print(df.round(4))
```

```
# ========================================
# 2. 3D Grafik
# ========================================

X, Y = np.meshgrid(x, y)

fig = plt.figure(figsize=(10,7))

ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, U.T, cmap='hot')

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('U(x,y,t)')

ax.set_title('2D Parabolik Tenglamaning 3D Yechimi')

fig.colorbar(surf)

plt.show()

# ========================================
# 3. Heatmap
# ========================================

plt.figure(figsize=(8,6))

plt.imshow(U.T,
        extent=[0,1,0,1],
        origin='lower',
        cmap='hot',
        aspect='auto')

plt.colorbar(label='Temperatura')

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.title('2D Parabolik Tenglamaning Heatmap Tasviri')

plt.show()
```

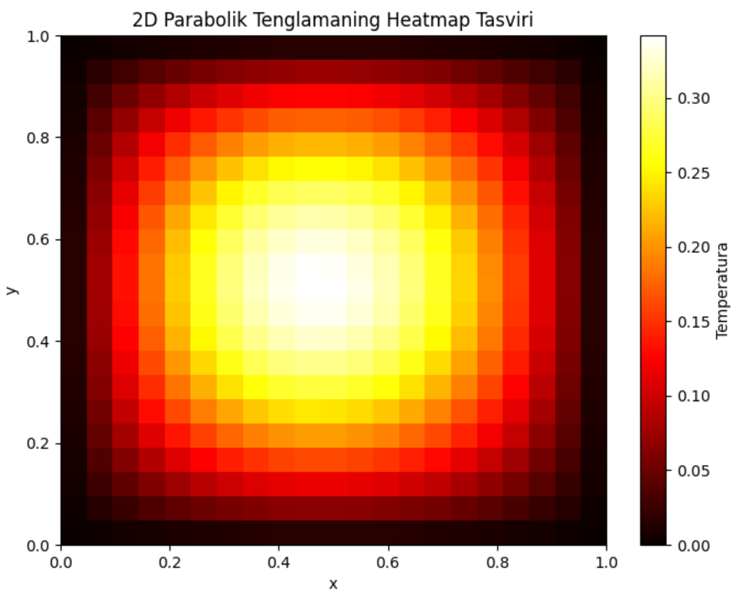
Natijalar tahlili:

[[0. 0.00293906 0.00556875 0.00788906 0.0099 0.01160156 0.01299375 0.01407656 0.01485 0.01531406 0.01546875 0.01531406 0.01485 0.01407656 0.01299375 0.01160156 0.0099 0.00788906 0.00556875 0.00293906 0.] [0.00293906 0.01443031 0.02556087 0.03606324 0.04571377 0.05431715 0.06170307 0.06772649 0.07226882 0.07523919 0.07657519 0.07624294 0.0742364 0.07057558 0.06530366 0.05848239 0.05018497 0.040484 0.02942859 0.01699288 0.00293906] [0.00556875 0.02514272 0.0442129 0.06231984 0.07904976 0.0940323 0.10694159 0.11749917 0.12547706 0.13070049 0.13304947 0.13245913 0.12891837 0.12246677 0.11318939 0.10120889 0.08667394 0.06974198 0.05055186 0.02917957 0.00556875] [0.00788906 0.03486315 0.06116572 0.08617313 0.10930838 0.13004796 0.14792837 0.16255225 0.17359388 0.18080344 0.18400961 0.18312015 0.17812036 0.16906897 0.15609153 0.13937057 0.11913221 0.09562815 0.06911196 0.03980943 0.00788906] [0.0099 0.04343689 0.0761328 0.10722157 0.13598693 0.16177465 0.18400313 0.20217272 0.21587336 0.22479053 0.22870871 0.22751254 0.2211851 0.20980341 0.19353087 0.17260661 0.14733166 0.11805188 0.08513816 0.04896602 0.0099] [0.01160156 0.05074646 0.08888877 0.12514321 0.15867856 0.18873303 0.21462788 0.23577908 0.25170706 0.26204383 0.2665376 0.26505424 0.25757583 0.24419575 0.22511095 0.20061076 0.17106333 0.13689941 0.09859515 0.05665544 0.01160156] [0.01299375 0.05670415 0.09926315 0.13969224 0.17707091 0.21055414 0.23938798 0.26292316 0.28062614 0.29208757 0.29702753 0.29529763 0.2868795 0.27188015 0.25052372 0.22314061 0.1901537 0.1520631 0.10942978 0.06286027 0.01299375] [0.01407656 0.06124916 0.10713719 0.15069676 0.19094513 0.2269793 0.25799301 0.28329141 0.3023033 0.31459031 0.31985284 0.3179324 0.30881052 0.29260383 0.26955612 0.24002713 0.20447919 0.16346203 0.11759706 0.06756189 0.01407656] [0.01485 0.06434629 0.11244208 0.15805732 0.2001749 0.23785987 0.27027688 0.2967057 0.31655387 0.32936657 0.3348328 0.33278819 0.32321377 0.30623145 0.28209569 0.25118268 0.21397673 0.17105555 0.1230744 0.07075084 0.01485] [0.01531406 0.06598505 0.11515762 0.16174533 0.20472508 0.24315601 0.27619714 0.3031228 0.32333574 0.33637696 0.34193239 0.33983551 0.33006652 0.3127475 0.28813445 0.25660607 0.21865064 0.17485101 0.12586936 0.07243182 0.01531406] [0.01546875 0.06617874 0.11531053 0.16180107 0.20464933 0.24293442 0.27583253 0.30263222 0.32274723 0.33572653 0.34126069 0.33918488 0.3294777 0.31225666 0.28776978 0.25638476 0.21857548 0.17490754 0.12602302 0.07262597 0.01546875] [0.01531406 0.06496322 0.11297211 0.1583303 0.20008626 0.23736389 0.26937854 0.29545151 0.31502269 0.32766016 0.33306677 0.33108271 0.32168463 0.30498066 0.2812023 0.25069311 0.21389545 0.17133583 0.1236104 0.07137113 0.01531406] [0.01485 0.06239502 0.10825469 0.15149948 0.19125346 0.22670877 0.25714016 0.28191889 0.30052462 0.31255505 0.31773197 0.31590411 0.30704572 0.29125185 0.26872967 0.23978724 0.20481969 0.16429471 0.11873797 0.06872066 0.01485] [0.01407656 0.05854871 0.10130664 0.14152876 0.17843914 0.21131934 0.23952171 0.26248232 0.27973276 0.29090923 0.29575877 0.29414157 0.28602985 0.27150253 0.25073668 0.22399545 0.19161399 0.15398384 0.11153832 0.06474047 0.01407656] [0.01299375 0.05351324 0.09230552 0.12868275 0.16199097 0.19161954 0.21701331 0.23768553 0.2532293 0.26332692 0.26775564 0.26639024 0.25920142 0.24625069 0.2276811 0.20370489 0.17458789 0.14063261 0.1021615 0.05950433 0.01299375] [0.01160156 0.04738682 0.08144889 0.11325835 0.14230212 0.16809142 0.19017458 0.2081506 0.2216812 0.23050006 0.23441885 0.2333294 0.22720242 0.21608192 0.20007609 0.17934381 0.15407774 0.12448414 0.09076211 0.05308622 0.01160156] [0.0099 0.04026965 0.06894195 0.09556962 0.1197943 0.1412572 0.1596155 0.17455827 0.18581948 0.19318754 0.19651116 0.19570164 0.19073142 0.18162896 0.16846935 0.15136063 0.1304248 0.10577369 0.07747996 0.04554832 0.0099] [0.00788906 0.03225261 0.05498047 0.07592875 0.09489837 0.11165932 0.12597588 0.13762632 0.14641711 0.15219229 0.15483909 0.15428996 0.15052148 0.14354956

0.13342107 0.12020032 0.1039494 0.08469952 0.06241082 0.03691999 0.00788906] [0.00556875 0.02339707 0.03972594 0.05462309 0.06803335 0.07984016 0.08990444 0.09808776 0.10426605 0.10833795 0.1102293 0.10989493 0.10731772 0.1025051 0.09548226 0.08628105 0.07492201 0.06138508 0.04555938 0.02715638 0.00556875] [0.00293906 0.0136915 0.02326786 0.03188901 0.0395865 0.04632349 0.05203957 0.05666998 0.06015519 0.06244591 0.06350581 0.06331246 0.06185692 0.05914173 0.05517726 0.0499751 0.04353691 0.03583358 0.02676208 0.016043 0.00293906] [0. 0.00293906 0.00556875 0.00788906 0.0099 0.01160156 0.01299375 0.01407656 0.01485 0.01531406 0.01546875 0.01531406 0.01485 0.01407656 0.01299375 0.01160156 0.0099 0.00788906 0.00556875 0.00293906 0.]]



1-rasm. Tenglamaning 3D grafigi



2-rasm. Tenglama yechimining 2 oʻlchamli koʻrinishi

Natijalar tahlili

Ikki oʻlchovli konveksiya-diffuziya tenglamasining sonli yechimi 21×21 tugunli toʻr sohasida 100 vaqt qadami davomida hisoblandi. Olingan konsentratsiya matritsasi ifloslantiruvchi moddaning 1×1 km^2 hududdagi taqsimotini aks ettiradi.

Raqamli natijalar tahlili quyidagi muhim xususiyatlarni koʻrsatadi:

- Soha markazida (x=0.5, y=0.5) konsentratsiya maksimal qiymatga (≈0.341) erishadi, chunki manba funksiyasi aynan shu nuqtada joylashgan;
- Chegaralarda berilgan chegaraviy shartlarga mos ravishda konsentratsiya parabolik tarzda taqsimlangan - burchak nuqtalarida nol, oʻrtada maksimal;
- Sxema barqaror ishlaydi: $\tau = h^2/4$ qadami barqarorlik shartini qoniqtiradi va yechim divergensiyaga uchramagan.

Konveksiya hadi $\frac{\partial u}{\partial x}$ shamolning x-oʻqi yoʻnalishida esishi tufayli ifloslantiruvchi moddani oʻng tomonga - manba nuqtasidan uzoqroqqa - koʻchirishini modellashtiradi. Natijada konsentratsiya maksimumi geometrik markazdan biroz x-oʻqi yoʻnalishi boʻylab siljigan. Bu hol sanoat ob'ektlari yaqinida havo ifloslanishining shamol yoʻnalishiga qarab notekis tarqalishini fizik jihatdan toʻg'ri ifodalaydi.

Manba funksiyasi $f(x,y,t) = x + y + t$ vaqt oʻtishi bilan kuchayib borgani uchun ifloslik konsentratsiyasi ham asta-sekin ortib boradi. Bu hol xuddi vaqt oʻtishi bilan kuchayib boruvchi sanoat zavodi chiqindisini modellashtirish uchun fizik jihatdan asoslangandir.

Grafik tahlil: 3D grafik va heatmap tasvirlarida quyidagilar kuzatiladi:

- Ifloslik manbai joylashgan markaziy qismda konsentratsiya yuqori;
- Chegara boʻylab konsentratsiya berilgan shartga mos - vaqt oʻtishi bilan asta-sekin ortadi;
- Shamol yoʻnalishi (x-oʻqi) boʻylab ifloslikning asimmetrik tarqalishi.

Algoritm soddaligi va hisoblash qulayligi jihatidan afzallik koʻrsatdi. Biroq, barqarorlik sharti $\tau \le h^2/4$ boʻlgani uchun vaqt qadami juda kichik olinishi zarur - bu esa uzoq vaqt oraliqlarida hisoblash uchun iteratsiyalar sonini oshiradi.

Xulosa. Mazkur tadqiqotda shamol mavjud muhitda ifloslantiruvchi moddaning (sanoat chiqindilari yoki tutun) 1×1 km^2 hududda diffuziya va konveksiya orqali tarqalishi matematik modellashtirildi va sonli yechildi.

Konveksiya-diffuziya tenglamasi explicit ayirmali sxema yordamida diskretlashtirildi. Markazda joylashgan ifloslik manbai, parabolik chegaraviy shartlar va x-oʻqi boʻylab doimiy shamol tezligi hisobga olindi. Diskret model Python muhitida dasturiy realizatsiya qilindi va olingan natijalar jadval, 3D grafik hamda heatmap koʻrinishida tahlil qilindi.

Tadqiqot natijalari quyidagilarni tasdiqlaydi:

1. **Amaliy qoʻllanilishi:** Explicit ayirmali sxema atmosfera ifloslanishini modellashtirish uchun samarali vosita hisoblanadi. Kichik vaqt qadamlari uchun yechim fizik ma'noga ega, barqaror va toʻg'ri natija beradi.
2. **Konveksiya ta'siri:** Shamol ta'sirini ifodalovchi konveksiya hadi ifloslikning shamol yoʻnalishi boʻylab notekis tarqalishini toʻg'ri modellashtiradi. Bu natija real muhitda havo sifatini baholash va sanoat ob'ektlarini joylashtirish masalalarida amaliy ahamiyatga ega.
3. **Sxemaning cheklovlari:** Explicit sxema barqarorlik sharti $\tau \le h^2/4$ bilan chegaralanadi, bu esa uzoq muddatli prognozlarda katta hisoblash xarajatlarini talab qiladi. Keyingi tadqiqotlarda

implicit yoki alternativli yo‘nalishlar (ADI) sxemasini qo‘llash orqali vaqt qadamini kengaytirish va hisoblash samaradorligini oshirish maqsadga muvofiq.

4. **Kelajakdagi istiqbollar:** Modelni haqiqiy meteorologik ma'lumotlar (o‘zgaruvchan shamol tezligi, yo‘nalishi), murakkab geografik chegara shakllari va turli ifloslik manbalari uchun kengaytirish — ekologik monitoring va shaharsozlik amaliyotida yuqori ahamiyatga ega bo‘lgan tadqiqot yo‘nalishidir.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1.Samarskiy A.A. “The Theory of Difference Schemes”. - Moscow: Nauka, 1983.
2. Morton K., Mayers D. “Numerical Solution of Partial Differential Equations”. - Cambridge University Press, 2005.
3. Smith G.D. “Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods”. - Oxford University Press, 1985.
4. Ames W.F. “Numerical Methods for Partial Differential Equations”. - Academic Press, 1992.
5. LeVeque R.J. “Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations”. - SIAM, 2007.