MAKTABLARDA O`RGANILMAYDIGAN UCHBURCHAKLARDA AJOYIB NUQTALAR

Bozorov Zokir Yo'ldosh o'g'li
Termiz davlat pedagogika instituti o'qituvchisi
Muhammadiyeva Mastura
Narzullayeva Marjona
Termiz davlat pedagogika universiteti talabalari
e-mail: muhammadiyevamastura5@gmail.com
e-mail: narzullayevamarjona53@gmail.com

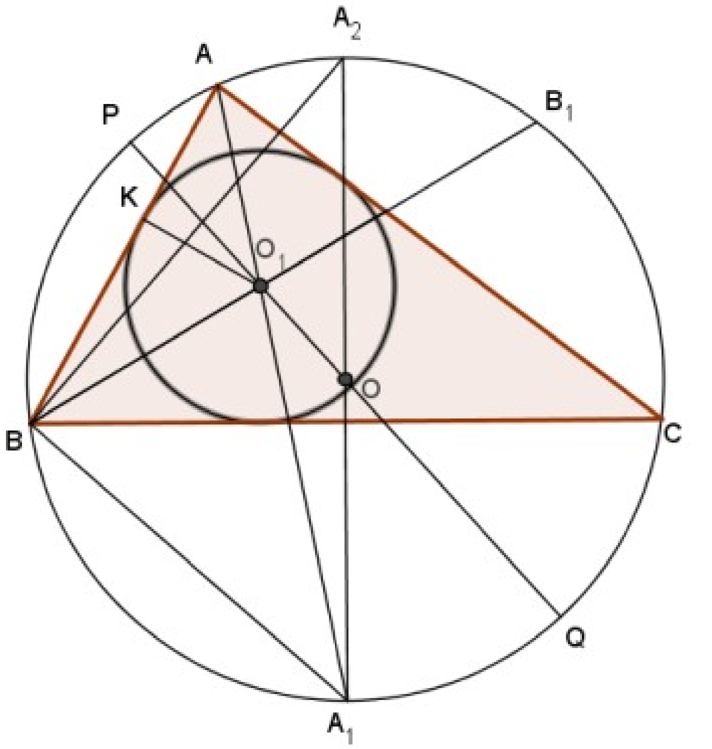
https://doi.org/10.5281/zenodo.20351141

Ma'lumki, har bir uchburchakka ichki aylana va tashqi aylana chizish mumkin. Ravshanki ichki chizilgan aylana tashqi chizilgan aylananing ichida yotadi, chunki ichki chizilgan aylana uchburchak ichida yotadi, uchburchakning o'zi esa tashqi chizilgan aylana ichida yotadi. Ularning radiuslari va markazlar orasidagi masofa har doim aniq munosabatda bo'g'langan. Anirog'i quyidagi **teorema** o'rinli: uchburchakka *tashqi* chizilgan *R*radiusli va *r* radiusli *ichki* aylana uchun, markazlar orasidagi *d* maso fa$d^2 = R^2 - 2Rr$ tenglik o'rinli.

Xususiy holda, agar d = 0 bo'lsa (aylana markazlari ustma-ust tushsa), u holda $R = 2r$ bo'ladi. Bu formula Eyler formulasi deyiladi. Endi teoremani isbotlaylik.

Isbot.

Tashqi chizilgan aylana markazi O va ichki chizilgan aylana markazi O_1 bo'lgan ABC uchburchakni qaraymiz. $d \neq 0$ deb kelishib olaylik(9-*a*rasm).



A va *B* burchaklarning AO_1 va BO_1 bissektrisalarini o'tkazamiz. Ular tashqi chizilgan aylana bilan biror A_1 va B_1 nuqtada kesishsin. OO_1 to'g'ri chiziqning tashqi chizilgan aylana bilan kesishgan nuqtasi *P* va *Q* bo'lsin. Kesishuvchi vatarlar haqidagi teoremaga ko'ra kesmalar ko'paytmasi $PO_1 \cdot O_1Q = AO_1 \cdot O_1A_1$ ga yoki $(R + d)(R - d) = AO_1 \cdot O_1A_1$ ga teng. *A* va *B* burchaklarning AA_1 va BB_1 bissektrisalari bo'lgani uchun, $B\breve{}A_1 = A_1\breve{}C$, a $C\breve{}B_1 = B_1\breve{}A$, ga teng bo'ladi. Demak,

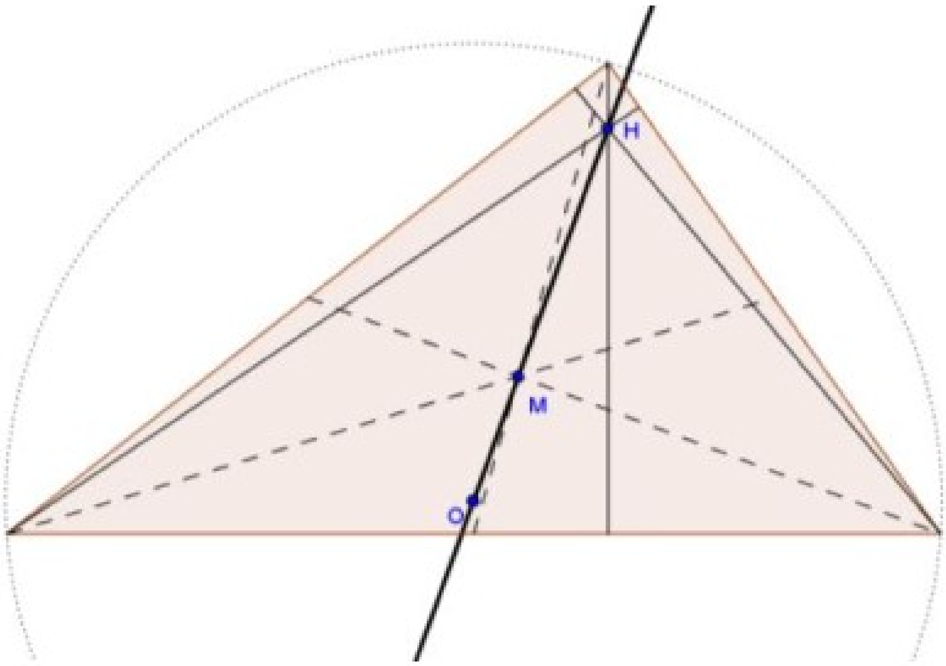
$BO_1A_1=\frac{B\breve{A}_1}{2}+\frac{A\breve{B}_1}{2}=\frac{A_1\breve{C}}{2}+\frac{C\breve{B}_1}{2}=O_1BA_1$ Shuning uchun, O_1A_1B uchburchak tengyonli: $O_1B_1= BA_1$. Shunday qilib, $(R + d)(R - d) = AO_1 \cdot O_1A_1$ tenglik $(R + d)(R - d) = AO_1 \cdot BA_1$ ga teng bo‘ladi.

Endi tashqi chizilgan aylananing A_1A_2 diametrini o‘tkazamiz va ichki chizilgan aylanani AB tomon bilan urinish nuqtasini K bilan belgilaylik. A_1A_2B va O_1A_1K uchburchaklar o‘xshash, shuning uchun $\frac{O_1K}{BA_1}=\frac{AO_1}{A_1A_2}$ yoki $\frac{r_1}{BA_1}=\frac{AO_1}{2R}$ ga teng bo‘ladi, bundan $AO_1 \cdot BA_1 = 2Rr$ kelib chiqadi.

d = 0 bo‘lgan holda, ABC uchburchakning har bir tomoni $2\sqrt{R^2-r^2}$ ga teng, demak bu uchburchak tengtomonli. Shuning uchun, $\angle ABC = 60^{\circ}$, $\angle BAO = 30^{\circ}$ va $R = 2r$ kelib chiqadi. *Teorema isbotlandi*.

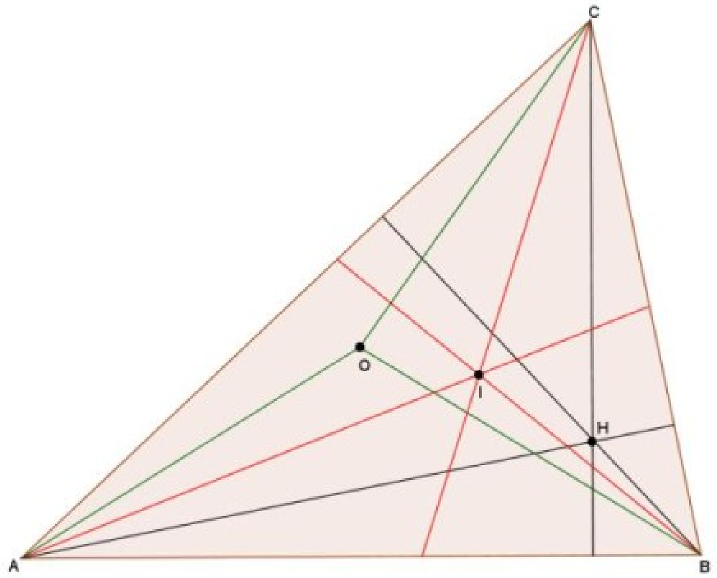
2.2. Eyler to‘g‘ri chizig‘i. Eyler teoremasi. Aylanada to‘qqizta nuqta.

Buyuk matematik Leonard Eyler uchburchak geometriyasida bir qancha ajoyib yangiliklar yaratdi. Masalan, har qanday uchburchakning M senroidi tashqi chizilgan aylana markazi O bilan H ortosentrni tutashtiruvchi kesmada yotishini va bu kesmani $OM:MH = 1:2$ nisbatda bo‘lishini isbotlagan, berilgan uchburchakdagi OH to‘g‘ri chizig’iga Eyler to‘g‘ri chizig’i deb ataladi(9-rasm, *b*).



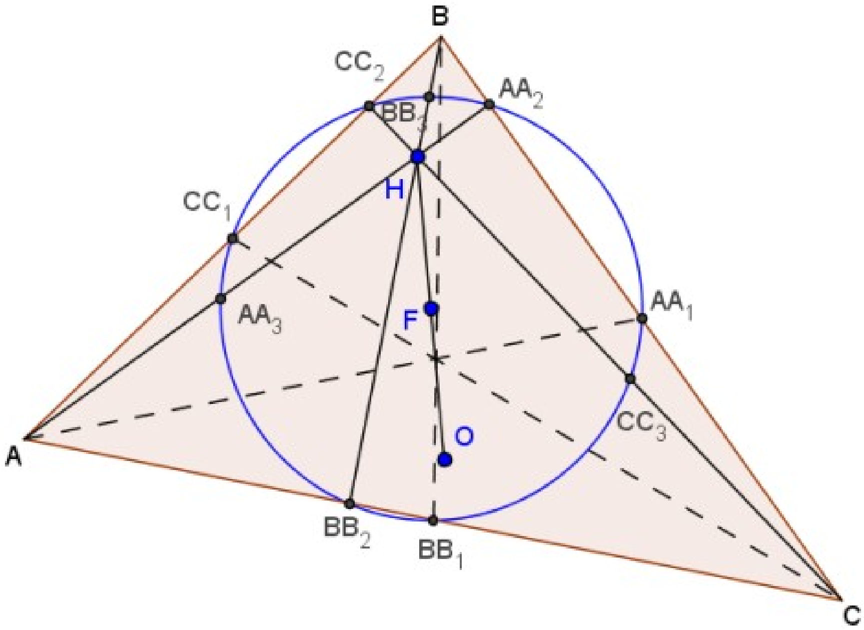
Teorema. Eyler to‘g‘ri chizig‘i uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazidan o‘tadi.

Izogonal nuqtalar. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ortosentri orasidagi yana bir bo’g‘lanishni qaraylik. Mos bissektrisalarga nisbatan simmetrik balandliklar yotgan to‘g‘ri chiziqlar, tashqi chizilgan aylana markazidan o‘tadi, ya’ni radiusni o‘z ichiga oladi(10-rasm).



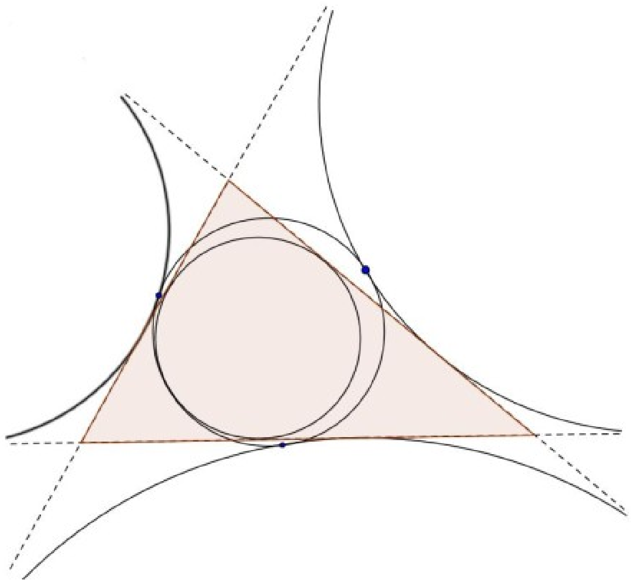
Umumiy teorema. Agar uchburchakning uchidan oʻtkazilgan uchta toʻgʻri chiziq bitta nuqtada kesishsa, u holda mos bissektrisalarga nisbatan simmetrik boʻlgan toʻgʻri chiziqlar ham bitta nuqtadan oʻtadi. Oʻxshash ikkita nuqtaga izogonal nuqtalar deyiladi. Shunday qilib, uchburchakning ortosentri tashqi chizilgan aylana markaziga izogonal.

Aylanada toʻqqizta nuqta. Eyler toʻgʻri chizigʻi bilan bogʻliq muhokamalarni davom ettirib, uchburchak tomonlarining oʻrtasi (AA_1, BB_1 va CC_1 nuqtalar), uning balandliklar asosi (AA_2, BB_2 va CC_2 nuqtalar) va uchidan ortosentrgacha boʻlgan kesmalarning oʻrtasi (AA_3, BB_3 va CC_3 nuqtalar) ni bitta aylanada yotishini isbotlash mumkin(11-rasm).



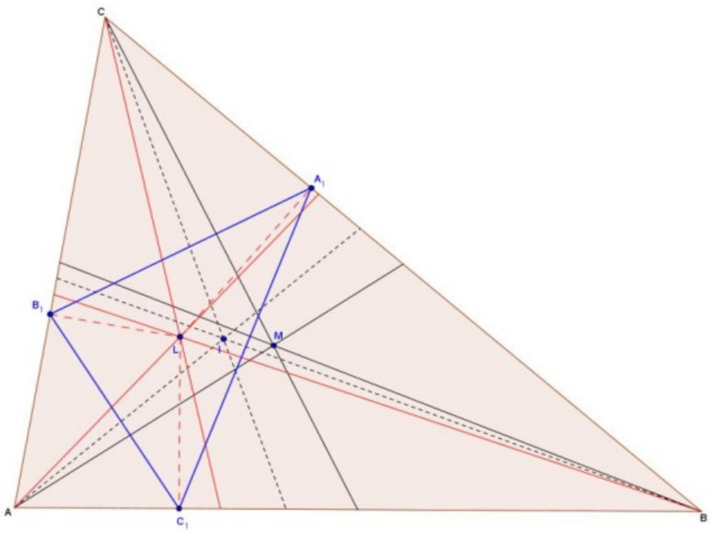
Uning radiusi tashqi chizilgan aylana radiusining yarmiga teng, F markaz esa OH kesmaning oʻrtasida yotadi. Bunga toʻqqiz nuqtali aylana yoki Eyler aylanasi, yoki Feyerbax aylanasi deyiladi(Filosof Lyudvig Feyerbaxning tu’gʻushgan akasi Germaniyadagi matematika oʻqituvchisi Karl Feyerbax nomi bilan yurutilgan).

Karl Feyerbax aylananing yana bir ajoyib xossasini ifodaladi: uchburchakka ichki chizilgan aylana, uchta tashqi ishki chizilgan aylanaga urinadi(12-rasm).



2.3. Lemuan nuqtasi. Chiziqlar - simedianalar

Yana bitta ajoyib nuqta – Lemuan nuqtasidir. Uchburchakning bissektrisasiga nisbatan medianaga mos to'g'ri chiziqni yasaymiz va simediana deb ataluvchi ajoyib to'g'ri chiziqqa ega bo'lamiz. Kesishish nuqtasi L – uchburchakning Lemuan nuqtasi deyiladi. U berilgan uchburchakning tomonlariga proyeksiyalash natijasida hosil bo'lgan $A_1B_1C_1$ uchburchakning sentroidi bo'ladi(13-rasm).



Nuqta fransuz geometri nuqtaning mavjudligini isbotlagan Emil Leuman nomini oldi.

Leuman nuqtaning xossalari:

1)tekislikdagi nuqtadan uchburchakkacha bo'lgan masofalar yi'g'indisining kvadrati minimal bo'ladi, agar bu nuqta Leuman nuqta bo'lsa;

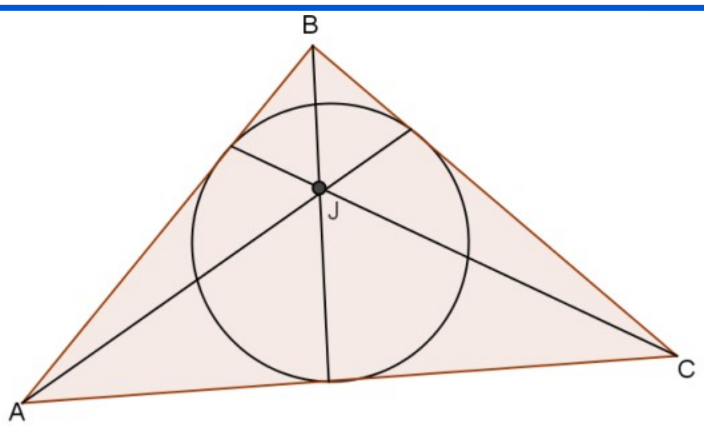
2) Leuman nuqtadan uchburchakning tomonlarigacha bo'lgan msofa, tomon uzunliklariga proporsional;

3) Leuman nuqtani uchburchak tomonlariga proyeksiyalashdan hosil bo'lgan

uchburchakning medianalari kesishgan nuqtasi - Leuman nuqta bo'ladi. Eng qiziq tomoni shundaki – bu nuqta yagona.

2.4. Jergon nuqtasi. Jergon teoremasi. Nagelning nuqtasi.

Uchburchakning uchi bilan unga ichki chizilgan aylananing urinish nuqtasini birlashtiruvchi uchta kesma bitta **J** nuqtada kesishadi(14-rasm). Unga Jergon nuqtasi deyiladi.

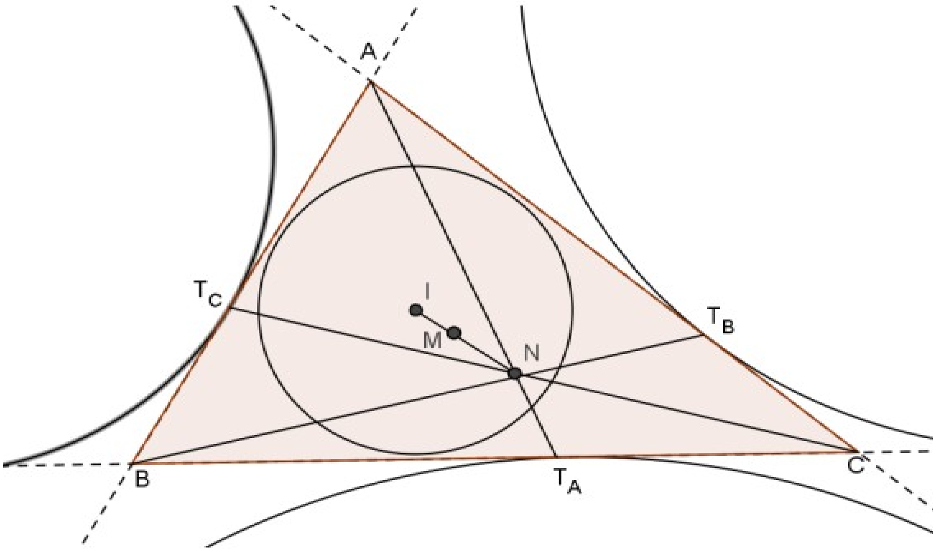


Jergonteoremasi. Uchta AD, BE va CF chevianalar ABC uchburchakning ichki J nuqtasida kesishgan bo‘lsin. U holda quyidagi tengliklar bajariladi:

$$\frac{JD}{AD}+\frac{JE}{BE}+\frac{JF}{CF}=1;\quad \frac{AJ}{AD}+\frac{BJ}{BE}+\frac{CJ}{CF}=2;$$

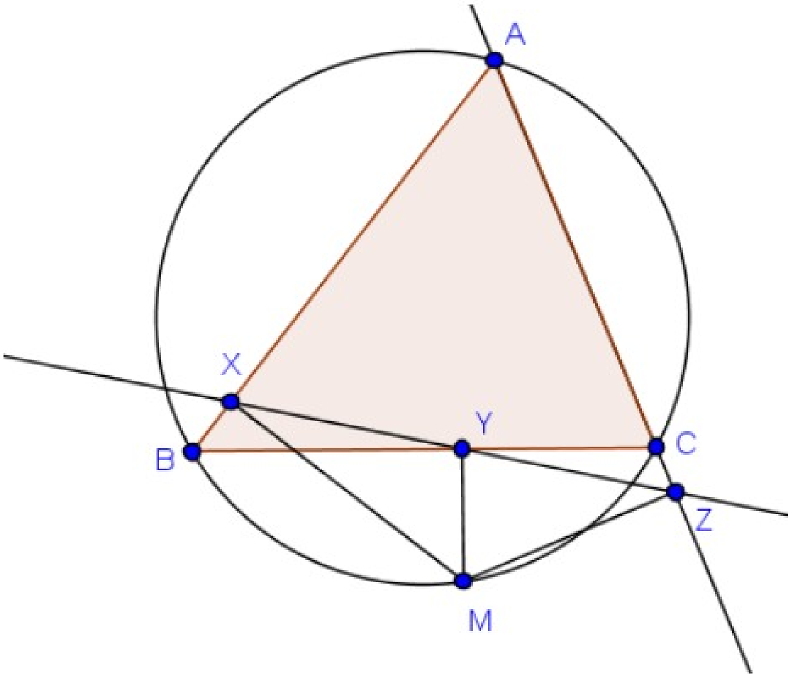
Nagel nuqtaning xossalari:

1)Nagel nuqtasi insentr va sentroid bilan birga bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi, bunda sentroid Nagel nuqta va inisentrni tutashtiruvchi kesmani 2:1 nisbatda bo‘ladi(15-rasm);



2) agar T_A⊠BC, T_B⊠AC va T_C⊠AB bo‘lsaAT_A, BT_B va CT_C kesmalarning har biri uchburchak perimetrini teng ikkiga bo‘ladi unda bu kesmalar bitta nuqtada kesishadi – Nagel nuqtasida kesishadi.

2.5. Simson to‘g‘ri chizig‘i. Simson teoremasi.



Isbot. ΔABC – ichki chizilgan, *MX*, *MY* va *MZ* berilgan perpendikulyarlar o'lsin. Uchta *X*, *Y* va *Z* nuqtalarni bitta to'g'ri chiziqda yotishini isbotlaymiz, *BYZ* va *CYZ* verrtikal burchaklar teng. *BM* diametrli aylanada yotgan *X* va *Y* lar to'g'ri burchakli uchburchakning uchlari. Demak, $\angle BYX = \angle BMX$. *MZCY* to'rtburchakda $\angle$ Y + $\angle$ Z = 180^{o}, shuning uchun tashqi chizilgan aylana mavjud. Bundan $\angle$ CYZ = $\angle$ CMZ. Shunday qilib talab etilganni tenglikni o'rniga, quyidagi ikki juft burchaklarning tengligini bittasini ko'rsatish mumkin: $\angle BMX = \angle CMZ$ yoki $\angle XBM = \angle ZCM$.

Oxirgi $\angle XBM = \angle ZCM$ tenglikni bajarilishi ko'rinib turibdi, chunki bu burchaklarning har biri ACM burchakni yoyiq burchakka to'ldiradi(XBM yoki ABM va ASM –burchaklar, ichki chizilgan to'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari, ZCM va ACM lar esa qo'shni burchaklardir).

Adabiyotlar, References, Литературы:

1.A.V. Pogorelov. Geometriya, Moskva " Nauka", 1984 yil, 320 bet.
2. A. Narmanov. Differensial geometriya, Toshkent, 2012 yil, 310 bet.
3. Sherbakov R.N. Pichurin L.F. Differensiali pomogayut geometrii. 1982. M. : Izd-vo "prosveщenie", 22 bet.
4. Bozorov Zokir Yuldosh o'g'li "Using the coordinate-vector method in solving planametrik problems" International journal of social science & interdisciplinary research ISSN: 2277-3630 Impact factor: 7.429 IJSSIR, Vol. 12, No. 05. May 2023. – B. 97-99.
5. Zokir Yuldosh o'g'li Bozorov "Ta'lim sifati menejmenti va unga bo'lgan yondashuvlar" research and education, Scientific Journal Impact Factor 2023: 5.789, ISSN: 2181-3191,VOLUME 2 | ISSUE 5 | 2023.
6. Zokir Yuldosh O'G'Li Bozorov "Conceptual basis of training of mathematics teachers" INTERNATIONAL JOURNAL OF SOCIAL SCIENCE & INTERDISCIPLINARY RESEARCH ISSN: 2277-3630 Impact Factor: 8.036, 13(03), 61–63.
7. Z Bozorov, O Ravshanova "BO'LAJAK MATEMATIKA FAN O'QITUVCHILARINING PLANIMETRIYA BO'YICHA KOMPETENTLIGINI RIVOJLANTIRISHDA TALABALAR MUSTAQIL ISHLARINING ROLI" Ijtimoiy-gumanitar fanlarning dolzarb muammolari Aktualnыe problemы sotsialno-gumanitarnых nauk Actual Problems of Humanities and Social Sciences. № 5 (5) – 2025