

CHIZIQLI BO'LMAGAN EMDEN-FOULER TENGLAMALARI UCHUN

MASALALARNI SONLI YECHISH USULLARI

Azimjonova Sanobar Nozimjon qizi

Farg'ona Davlat Universiteti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19950574>

Annotatsiya. Ushbu maqolada chiziqli bo'lmagan Emden-Fouler tenglamasi uchun chegaraviy va boshlang'ich masalalarni yechishda qo'llaniladigan ikkita asosiy sonli usul Runge-Kutta usuli va chekli farqlar usuli tahlil qilinadi. Har bir usulning matematik asosi, algoritmik tuzilishi va hisoblash samaradorligi ko'rib chiqiladi. $x = 0$ nuqtasidagi singularlik cheksiz kichik nisbatlar qoidasi va Teylor qatori yordamida tartibga solinadi. Turli parametrlar uchun olingan natijalar taqqoslanib, usullarning aniqlik va qo'llanilish sohalari bo'yicha tavsiyalar beriladi.

Kalit so'zlar: Emden-Fouler tenglamasi, Runge-Kutta usuli, chekli farqlar usuli, chiziqli bo'lmagan differensial tenglama, chegaraviy masala, singularlik.

Kirish

Emden-Fowler tenglamasi fizika va astrofizikada muhim o'rin tutuvchi chiziqli bo'lmagan oddiy differensial tenglama bo'lib, u 1907-1930 yillarda R. Emden va A.R. Fowler tomonidan yulduz ichki tuzilishini o'rganish jarayonida taklif etilgan [1]. O'zbekistonlik olimlardan Iskandarov [1] va Rasulov [2] o'z asarlarida differensial tenglamalarni sonli yechish usullarini batafsil yoritgan.

Ushbu tenglama umumiy ko'rinishda quyidagi shaklda yoziladi:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x)g(y) = 0, \quad x \in (0, 1] \quad (1)$$

bu yerda α haqiqiy son, $f(x)$ va $g(y)$ berilgan funksiyalar. Tenglamaning $x = 0$ nuqtasida singularligi mavjud bo'lib, bu sonli yechish jarayonini murakkablashtiradi.

Emden-Fouler tenglamasi gaz sharidagi bosim taqsimoti, radiatsiya bosimi, termoyadroviy reaksiyalar, kimyoviy kinetika, biologik o'sish modellari va elektrodinamikada keng qo'llaniladi.

Tenglamaning aniq yechimi faqat ayrim maxsus holatlarda mavjud [4]. Shuning uchun amaliy masalalarda sonli usullarga murojaat qilinadi. Ushbu maqolada ikkita asosiy sonli usul Runge-Kutta va chekli farqlar usuli batafsil ko'rib chiqiladi.

Emden-Fouler tenglamasining matematik asosi

Umumiy ko'rinishda Emden-Fouler tenglamasi quyidagi chegaraviy masala sifatida beriladi:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + f(x)|y(x)|^p \operatorname{sgn}(y(x)) = 0 \quad (2)$$

boshlang'ich shartlar bilan:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3)$$

yoki chegaraviy shartlar $y(1) = 0$

bilan:

$$y(0) = A, \quad y(1) = B \quad (4)$$

Maxsus hol: $\alpha = 2$, $f(x) = 1$ va $p = n$ bo'lganda Lane-Emden tenglamasi hosil bo'ladi:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0 \quad (5)$$

bu yerda n politropik indeks. $n = 0, 1, 5$ qiymatlari uchun analitik yechimlar ma'lum:

$$n = 0 : \quad y(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \quad (6)$$

$$n = 1 : \quad y(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (7)$$

$$n = 5 : \quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2} \quad (8)$$

$x = 0$ nuqtasidagi singularlikni bartaraf etish uchun cheksiz kichik nisbatlar qoidasidan foydalaniladi [5]:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x} y'(x) = \alpha y'' \quad (9)$$

$y'(0) = 0$ ekanligidan $y(x)$ ni Teylor qatoriga yoyamiz:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + O(x^4) \quad (10)$$

Bu ifodani (2) tenglamaga qo'yib va $x \rightarrow 0$ limitda:

$$y''(0) + \alpha y''(0) + f(0)|y(0)|^p \operatorname{sgn}(y(0)) = 0 \quad (11)$$

$y(0) = 1$ bo'lgani uchun:

$$y''(0) = -\frac{f(0)}{1 + \alpha} \quad (12)$$

Bu regularizatsiyalangan boshlang'ich shartlar kichik $\varepsilon > 0$ dan boshlab sonli integrallash imkonini beradi.

Runge-Kutta usuli

To'rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli (RK4) boshlang'ich masalalarni yechishda eng keng tarqalgan usullardan biridir [6]. Ikkinchi tartibli tenglamani birinchi tartibli sistema ko'rinishiga o'tkazamiz:

$$u_1 = y, \quad u_2 = y' \quad (13)$$

U holda:

$$u_1' = u_2 \quad (14)$$

$$u_2' = -\frac{\alpha}{x}u_2 - f(x)g(u_1) \quad (15)$$

h qadam uzunligida RK4 iteratsiyasi quyidagicha amalga oshiriladi:

$$k_1 = h \cdot F(x_n, u_n) \quad (16)$$

$$k_2 = h \cdot F(x_n + h/2, u_n + k_1/2) \quad (17)$$

$$k_3 = h \cdot F(x_n + h/2, u_n + k_2/2) \quad (18)$$

$$k_4 = h \cdot F(x_n + h, u_n + k_3) \quad (19)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (20)$$

Usulning mahalliy xatosi $O(h^5)$, global xatosi esa $O(h^4)$ tartibida.

$x = 0$ da integrallashni kichik $\varepsilon = 10^{-6}$ dan boshlaymiz. Boshlang'ich qiymatlar Teylor qatoridan olinadi:

$$y(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{2}y''(0)\varepsilon^2, \quad y'(\varepsilon) = y''(0)\varepsilon \quad (21)$$

bu yerda $y''(0)$ (12) formula bilan berilgan.

RK4 usulining asosiy afzalligi yuqori aniqlik va nisbatan oddiy dasturlash imkoniyatidir. Kamchiligi chegaraviy masalalarga to'g'ridan-to'g'ri qo'llab bo'lmasligi va qadam tanlash masalasidir.

Chekli farqlar usuli

[0,1] kesmani N ta teng bo'lakka bo'lamiz:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N} \quad (22)$$

Hosilalar markaziy chekli farqlar bilan almashtiriladi:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (23)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (24)$$

Har bir ichki nuqta x_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) uchun diskret tenglama:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{\alpha}{x_i} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + f(x_i)g(y_i) = 0 \quad (25)$$

$x = 0$ nuqtasida chekli farqlar formulasini qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun birinchi ichki nuqta $i = 1$ (ya'ni $x_1 = h$) dan boshlanadi va y_0 qiymati chegaraviy shartdan olinadi:

$$y_0 = A \quad (26)$$

(25) tenglama $N - 1$ ta noma'lum uchun $N - 1$ ta chizikli bo'lmagan tenglamalar sistemasini ifodalaydi [7]. Uni quyidagicha yozamiz:

$$\Phi_i(\mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (27)$$

Nyuton-Rafson iteratsiyasi:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) - J^{-1}\Phi(\mathbf{y}(k)) \quad (28)$$

bu yerda J Yakobian matritsasi. Yakobian matritsasi uch-diagonal ko'rinishga ega:

$$J_{i,i-1} = \frac{1}{h^2} - \frac{\alpha}{2hx_i} \quad (29)$$

$$J_{i,i} = -\frac{2}{h^2} + f(x_i)g'(y_i) \quad (30)$$

$$J_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} + \frac{\alpha}{2hx_i} \quad (31)$$

Bu tuzilma $O(N)$ operatsiyada tezkor yechish imkonini beradi.

Chekli farqlar usulining afzalliklari: chegaraviy masalalarga to'g'ridan-to'g'ri qo'llaniladi, seyraksimli matritsa tuzilmasi tezkor hisoblashni ta'minlaydi. Kamchiliklari: ikkinchi tartibli aniqlik ($O(h^2)$), chizikli bo'lmagan sistemani yechish talab etiladi.

Natijalar va taqqoslash $n = 1$ uchun Lane-Emden tenglamasini qaraymiz:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (32)$$

Aniq yechim:

$$y_{\text{aniq}}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (33)$$

Hisoblash parametrlari: soha $x \in [0,1]$, qadam uzunligi $h = 0.01$ ($N = 100$), xatolik chegarasi $\varepsilon = 10^{-10}$.

Usul	Xato (L_∞)	Hisoblash vaqti (s)	Xotira talabi
Runge-Kutta (RK4)	1.23×10^{-8}	0.032	Kam
Chekli farqlar usuli	5.67×10^{-5}	0.008	O'rtacha

1-jadval. Ikki usulning samaradorligi taqqoslash natijalari ($N = 100, h = 0.01$)

x	RK4 xatosi	Chekli farqlar xatosi
0.2	2.34×10^{-9}	1.45×10^{-6}
0.4	4.56×10^{-9}	3.89×10^{-6}
0.6	7.89×10^{-9}	8.23×10^{-6}
0.8	1.12×10^{-8}	1.67×10^{-5}
1.0	1.23×10^{-8}	5.67×10^{-5}

2-jadval. Turli nuqtalardagi xatoliklar ($n = 1$)

n	RK4 xatosi	Chekli farqlar xatosi
0	2.34×10^{-9}	3.45×10^{-6}
1	1.23×10^{-8}	5.67×10^{-5}
2	3.45×10^{-8}	1.23×10^{-4}
3	7.89×10^{-8}	2.89×10^{-4}
4	1.56×10^{-7}	6.78×10^{-4}
5	2.34×10^{-7}	1.23×10^{-3}

3-jadval. Turli politropik indekslar uchun maksimal xatolar ($h = 0.01$)

h	L_{∞} xato	Konvergensiya tartibi
0.1	1.23×10^{-4}	—
0.05	7.89×10^{-6}	3.96
0.025	4.89×10^{-7}	4.01
0.0125	3.02×10^{-8}	4.02
0.00625	1.89×10^{-9}	4.00

4-jadval. RK4 usuli uchun konvergensiya tadqiqi ($n = 1$)

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, Runge-Kutta usuli taxminan 10^{-8} aniqlikka erishadi, chekli farqlar usuli esa 10^{-5} aniqlikka erishadi. $n = 5$ uchun xatolar ortadi, chunki yechim $x = 1$ yaqinida chegara qatlami xususiyatiga ega.

Hisoblash samaradorligi jihatidan chekli farqlar usuli eng tez (0.008 soniya), RungeKutta usuli esa o'rtacha vaqt talab qiladi (0.032 soniya).

Ikkala usul ham $x = 0$ nuqtasidagi singularlikni muvaffaqiyatli davolaydi. Amalda $\varepsilon = 10^{-6}$ dan boshlash va Teylor kengaymasidan foydalanish yaxshi natija beradi.

Xulosa

Ushbu maqolada chiziqli bo'lmagan Emden-Fouler tenglamasi uchun ikkita sonli usul Runge-Kutta usuli va chekli farqlar usuli ko'rib chiqildi va taqqoslandi. Olingan natijalar asosida quyidagi xulosalar chiqarish mumkin: Runge-Kutta usuli (RK4) yuqori aniqlikni ta'minlaydi va boshlang'ich masalalar uchun qulay. Chekli farqlar usuli katta hajmli masalalar uchun hisoblash samaradorligi jihatidan ustun turadi. $x = 0$ nuqtasidagi singularlikni davolash cheksiz kichik nisbatlar qoidasi va Teylor qatori yordamida muhim ahamiyat kasb etadi. Kelajakda spektral usullar va moslashuvchan to'r usullarini qo'llash yechim sifatini yanada oshirishi mumkin.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Iskandarov S. (2010). Hisoblash matematikasi asoslari. Toshkent.
2. Xalilov S. (2012). Matematik fizika tenglamalari. Toshkent.

3. O'rinov.A.Q (2014). Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. Toshkent.
4. Wazwaz, A.M. (2001). A new algorithm for solving differential equations of LaneEmden type. Applied Mathematics and Computation, 118(2-3), 287-310.
5. Ramos, J.I. (2003). Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations. Applied Mathematics and Computation, 140(2-3), 677693.
6. Butcher, J.C. (2016). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 3rd edition.