IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR INVARIANTLARI VA ULARNI ANIQLASH USULLARI

Mo'ydinova Hadicha
Fizika-Matematika fakukteti, 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.19908247

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli egri chiziqlarning invariantlari va ularni aniqlash usullari o'rganiladi. Natijalarda diskriminant, determinant va iz kabi invariantlar orqali ellips, parabola va giperbola sinflari ajratildi. Shuningdek, egri chiziqlarni aylantirish va siljitish orqali soddalashtirish usullari keltirildi. Muhokama qismida olingan natijalar grafik modellashtirish va geometriyada qo'llanishi bilan bog'liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida invariantlar egri chiziqlarni klassifikatsiya qilishda asosiy vosita ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli egri chiziq, koniklar, invariant, diskriminant, determinant, ellips, parabola, giperbola, kanonik ko'rinish, koordinata almashtirish.

ИНВАРИАНТЫ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЫ ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация: В данной статье исследуются инварианты кривых второго порядка и методы их определения. В результатах посредством инвариантов - дискриминанта, определителя и следа - выделены классы эллипса, параболы и гиперболы. Кроме того, приведены методы упрощения кривых путём вращения и сдвига координат. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с применением в графическом моделировании и геометрии. В заключение показано, что инварианты являются основным инструментом классификации кривых второго порядка.

Ключевые слова: кривая второго порядка, конические сечения, инвариант, дискриминант, определитель, эллипс, парабола, гипербола, канонический вид, замена координат.

INVARIANTS OF SECOND-ORDER CURVES AND METHODS FOR THEIR DETERMINATION

Abstract: This paper investigates the invariants of second-order curves and the methods for their determination. The results distinguish the classes of ellipse, parabola, and hyperbola through invariants such as the discriminant, determinant, and trace. Furthermore, methods for simplifying curves by means of rotation and translation of coordinates are presented. In the discussion section, the obtained results are analysed in connection with applications in graphical modelling and geometry. As a conclusion, it is demonstrated that invariants serve as the primary tool for the classification of second-order curves.

Keywords: second-order curve, conic sections, invariant, discriminant, determinant, ellipse, parabola, hyperbola, canonical form, coordinate transformation.

Kirish

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar analitik geometriyaning asosiy obyektlaridan biri boʻlib, ular koʻplab geometrik va amaliy masalalarda muhim rol oʻynaydi. Ushbu egri chiziqlar umumiy holda quyidagi kvadratik tenglama orqali ifodalanadi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Bu tenglama ellips, parabola va giperbola kabi mashhur egri chiziqlarni oʻz ichiga oladi. Mazkur egri chiziqlarni toʻgʻri tahlil qilish va ularni klassifikatsiya qilish uchun invariantlar tushunchasi muhim ahamiyatga ega.

Invariantlar - bu koordinata almashtirish (aylantirish va siljitish) natijasida oʻzgarmaydigan kattaliklardir. Ular egri chiziqning geometrik tabiatini aniqlash imkonini beradi. Eng muhim invariantlardan biri diskriminant hisoblanadi:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Bu invariant yordamida egri chiziq turi aniqlanadi:

- $\Delta < 0 \rightarrow$ ellips (yoki aylana);
- $\Delta = 0 \rightarrow$ parabola;
- $\Delta > 0 \rightarrow$ giperbola.

Shuningdek, determinant koʻrinishidagi invariant ham muhim rol oʻynaydi:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

Bu invariant egri chiziqning degeneratsiyalangan yoki oddiy ekanligini aniqlash imkonini beradi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni oʻrganishda yana bir muhim invariant - iz (trace) hisoblanadi: $I = A + C$. Bu kattalik egri chiziqning umumiy xossalarini tahlil qilishda qoʻllaniladi.

Egri chiziqlarni soddalashtirish uchun koordinata almashtirish usullari qoʻllaniladi. Masalan, oʻqlarni aylantirish orqali xyhadi yoʻqotiladi. Aylantirish formulalari: $x = x'\cos\,\theta - y'\sin\,\theta, y = x'\sin\,\theta + y'\cos\,\theta$.

Burchak θ quyidagi shartdan aniqlanadi: $\mathrm{tg}\;2\theta = \frac{B}{A-C}$. Natijada tenglama kanonik koʻrinishga keltiriladi. Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, ikkinchi tartibli egri chiziqlar fizika, muhandislik, optika va iqtisodiyotda keng qoʻllaniladi. Masalan, sayyoralarning harakati ellips orqali, aks ettirish xossalari parabola orqali, va ayrim texnik tizimlar giperbola orqali ifodalanadi.

Invariantlar yordamida egri chiziqni koordinatalarni oʻzgartirmasdan turib aniqlash mumkinligi ushbu mavzuning ilmiy ahamiyatini oshiradi. Bu esa hisoblashlarni soddalashtiradi va umumiy yondashuvni taʼminlaydi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi ikkinchi tartibli egri chiziqlarning invariantlarini aniqlash, ularning yordamida egri chiziqlarni klassifikatsiya qilish va kanonik koʻrinishga keltirish usullarini oʻrganishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, invariantlar tizimi yagona metodologik asosda qaraladi va ular orqali egri chiziqlarning geometrik tabiati aniqlanadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli egri chiziqlar invariantlari analitik geometriyaning muhim vositasi boʻlib, ular egri chiziqlarni chuqur tahlil qilish imkonini beradi.

Metod

Mazkur tadqiqot ikkinchi tartibli egri chiziqlarning invariantlarini aniqlash va ular asosida egri chiziqlarni klassifikatsiya qilishga qaratilgan bo'lib, analitik geometriya, determinantlar nazariyasi va koordinata almashtirish metodlari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida umumiy kvadratik tenglama qaraldi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Metodologiyaning markaziy g'oyasi koordinata tizimi o'zgarganda o'zgarmaydigan kattaliklar - invariantlar orqali egri chiziqning geometrik tabiatini aniqlashdan iborat.

Avvalo, kvadratik forma quyidagi matritsa orqali ifodalandi:

$$Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$$

Bu matritsa yordamida asosiy invariantlar aniqlanadi.

Asosiy invariantlar sifatida quyidagi kattaliklar tanlandi:

1. **Diskriminant (asosiy klassifikator):**

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

2. **Kvadratik forma determinanti:**

$$I_2 = AC - \frac{B^2}{4}$$

3. **To'liq determinant:**

$$\delta = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

4. **Iz (trace):**

$$I_1 = A + C$$

Mazkur invariantlar koordinata almashtirishda o'zgarmas bo'lib, egri chiziqni aniqlashda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi.

Metodologiyada egri chiziqni soddalashtirish uchun koordinata aylantirish qo'llanildi. Bu orqali xyhadi yo'qotildi:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \quad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

Aylantirish burchagi quyidagicha aniqlanadi: tg $2\theta = \frac{B}{A-C}$. Natijada tenglama diagonal ko'rinishga keltirildi:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Keyingi bosqichda koordinatalar siljitildi:

$$x' = X + x_0, y' = Y + y_0$$

Bu orqali chiziq markazi aniqlanib, tenglama kanonik ko'rinishga keltirildi.

Kanonik ko'rinishlar quyidagicha aniqlashtirildi:

Ellips: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Giperbola: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Parabola: $Y^2 = 2pX$

Egri chiziq turini aniqlash metodologiyasi quyidagi sxema asosida qurildi:

$$\Delta \Rightarrow \text{tur (ellips/parabola/giperbola)}$$
$$\delta \Rightarrow \text{degeneratsiya holati}$$
$$I_1, I_2 \Rightarrow \text{qo‘shimcha xossalar}$$

Shuningdek, metodologiyada quyidagi muhim xossa qo‘llanildi:

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{yopiq egri (ellips)}$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow \text{ochiq egri (parabola)}$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{ikki shoxli egri (giperbola)}$$

Yakuniy bosqichda umumiy model quyidagicha ifodalandi:

$$(A, B, C, D, E, F) \Rightarrow (\Delta, I_1, I_2, \delta) \Rightarrow \text{egri turi}$$

Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya invariantlar yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlash, ularni klassifikatsiya qilish va kanonik ko‘rinishga keltirish imkonini berdi.

Natija

Tadqiqot natijasida ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlash va tasniflash uchun invariantlarga asoslangan yagona va tizimli yondashuv ishlab chiqildi. Bu yondashuv koordinata tizimini o‘zgartirmasdan turib egri chiziqning geometrik tabiatini aniqlash imkonini beradi.

Umumiy tenglama:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

uchun invariantlar orqali quyidagi muhim natijalar olindi.

Birinchi asosiy natija - egri chiziqning turini aniqlash uchun diskriminant yetarli ekanligi:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Bu invariant orqali egri chiziq quyidagicha ajratildi:

- $\Delta < 0 \rightarrow$ yopiq turdagi egri (elliptik tip)
- $\Delta = 0 \rightarrow$ kritik o‘tish holati (parabolik tip)
- $\Delta > 0 \rightarrow$ ikki shoxli ochiq egri (giperbolik tip)

Bu natija shuni ko‘rsatdiki, Δegri chiziqning **global geometriyasini** aniqlovchi asosiy invariant hisoblanadi.

Ikkinchi muhim natija - egri chiziqning mavjudligi va degeneratsiya holatini aniqlash uchun determinant ishlatilishi:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

Natijada quyidagi holatlar aniqlandi:

- $\delta \neq 0 \rightarrow$ haqiqiy egri chiziq mavjud
- $\delta = 0 \rightarrow$ degeneratsiyalangan holat (ikki chiziq, nuqta yoki bo‘sh to‘plam)

Bu invariant egri chiziqning **geometrik mavjudlik sharti**ni beradi.

Uchinchi natija - kvadratik qismning xossalari orqali egri chiziqning shaklini aniqlash:

$$I_2 = AC - \frac{B^2}{4}$$

Bu invariant quyidagicha talqin qilindi:

- $I_2 > 0 \rightarrow$ elliptik struktura

- $I_2 = 0 \rightarrow$ parabolik chegaraviy holat
- $I_2 < 0 \rightarrow$ giperbolik struktura

Bu natija diskriminant bilan birgalikda egri chiziqni ikki xil mezon orqali tekshirish imkonini berdi.

Teorema (Invariantlar orqali to'liq klassifikatsiya prinsipi): Ikkinchi tartibli egri chiziqning geometrik turi va mavjudligi quyidagi invariantlar to'plami orqali to'liq aniqlanadi:

$$(\Delta, \ \delta, \ I_2)$$

Δ- egri chiziqning global turini belgilaydi

δ- egri chiziqning mavjudligini aniqlaydi

I_2- kvadratik shaklning ichki strukturaviy tipini ko'rsatadi

Bu uch invariant egri chiziqni **to'liq va yagona klassifikatsiya qilish** imkonini beradi.

Yana bir muhim natija - koordinata aylantirishdan keyin xy hadining yo'qolishi orqali tenglama soddalashishi: $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}$. Natijada egri chiziqning asosiy o'qlari aniqlanadi va u kanonik ko'rinishga o'tadi.

Tadqiqot natijalarida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$(A, B, C, D, E, F) \ \longrightarrow \ (\Delta, \delta, I_2) \ \longrightarrow \ \text{geometrik tip}$$

Natijalarning yana bir muhim jihati shundaki, invariantlar koordinata tizimiga bog'liq emas. Bu esa quyidagi xulosani beradi:

Egri chiziqning tabiati koordinatalardan mustaqil

Umuman olganda, olingan natijalar invariantlar yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlash va tasniflash jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi hamda uni universal matematik modelga aylantiradi.

Muhokama

Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, ikkinchi tartibli egri chiziqlarni invariantlar orqali o'rganish nafaqat hisoblashni soddalashtiradi, balki ularning geometrik mohiyatini chuqurroq anglash imkonini beradi. Klassik yondashuvlarda egri chiziqlar ko'pincha koordinata almashtirish orqali kanonik ko'rinishga keltiriladi, ammo bu jarayon ko'p hollarda murakkab algebraik hisoblashlarni talab qiladi. Invariantlar esa bu bosqichni chetlab o'tib, egri chiziqning turini bevosita aniqlash imkonini beradi.

Muhokamada diskriminantning asosiy roli alohida ta'kidlandi:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Bu kattalik aslida kvadratik shaklning signaturasini ifodalaydi. Geometrik nuqtai nazardan qaraganda, Δegri chiziqning ochiq yoki yopiq ekanligini belgilaydi. Masalan, $\Delta < 0$ bo'lganda egri chiziq yopiq (ellips) bo'lishi, uning barcha yo'nalishlarda chegaralanganligini bildiradi. Aksincha, $\Delta > 0$holatda egri chiziq ikki tomonga ochilib ketadi, bu esa giperbolaning asosiy xossasidir.

Determinant:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{vmatrix}$$

esa egri chiziqning mavjudligi bilan bogʻliq chuqur geometrik maʼnoga ega. Muhokama natijalariga koʻra, $\delta = 0$ boʻlgan holatlarda egri chiziq "parchalanadi", yaʼni u ikki toʻgʻri chiziqqa yoki bitta nuqtaga aylanadi. Bu holat analitik geometriyada degeneratsiya sifatida qaraladi va koʻpincha fizik yoki texnik modellarda muhim chegaraviy vaziyatlarni ifodalaydi.

Invariant $I_2 = AC - \frac{B^2}{4}$ esa kvadratik shaklning ichki strukturasi haqida maʼlumot beradi. Bu kattalik aslida egri chiziqning asosiy oʻqlari boʻyicha qanday "choʻzilgan" yoki "siqilgan" ekanligini bildiradi. Muhokamada aniqlanishicha, I_2va Δoʻzaro bogʻliq boʻlsa-da, ular turli geometrik jihatlarni ifodalaydi: biri global shaklni, ikkinchisi lokal strukturani tavsiflaydi.

Koordinata aylantirish: $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}$ jarayoni invariantlar bilan birgalikda qaralganda, egri chiziqning yashirin simmetriyasini ochib beradi. Bu natija shuni koʻrsatadiki, har qanday kvadratik egri chiziq mos koordinata tizimida diagonal koʻrinishga keltiriladi, yaʼni uning asosiy oʻqlari mavjud.

Muhokamada yana bir muhim jihat - invariantlarning universalligi hisoblanadi. Ular nafaqat tekislikdagi egri chiziqlar uchun, balki yuqori oʻlchovli fazolarda ham umumlashtirilishi mumkin. Bu esa invariantlar nazariyasining kuchli matematik asosga ega ekanligini koʻrsatadi.

Shuningdek, invariant yondashuvning cheklovlari ham qayd etildi. Masalan, invariantlar egri chiziqning turini aniqlaydi, ammo uning aniq joylashuvi yoki oʻlchamlarini toʻliq tavsiflab bermaydi. Shu sababli, amaliy masalalarda invariantlar koʻpincha koordinata almashtirish usullari bilan birgalikda qoʻllanilishi zarur.

Muhokama natijalari shuni koʻrsatdiki, invariantlar egri chiziqlarni oʻrganishda eng samarali va umumiy vositalardan biri hisoblanadi. Ular orqali geometrik obyektlarni koordinatalardan mustaqil holda tahlil qilish mumkin. Umuman olganda, invariantlar nazariyasi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni oʻrganishda chuqur matematik asos yaratadi va ularni klassifikatsiya qilishda universal yondashuvni taʼminlaydi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda ikkinchi tartibli egri chiziqlarning invariantlari va ularni aniqlash usullari tizimli ravishda oʻrganildi hamda ular asosida egri chiziqlarni klassifikatsiya qilishning samarali modeli ishlab chiqildi. Olingan natijalar shuni koʻrsatdiki, umumiy kvadratik tenglama:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

uchun invariantlar egri chiziqning geometrik tabiatini aniqlashda hal qiluvchi rol oʻynaydi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

a) invariantlar egri chiziqni koordinata tizimidan mustaqil ravishda aniqlash imkonini beradi;
b) diskriminant egri chiziqning global turini belgilaydi;
c) determinant egri chiziqning mavjudlik shartini aniqlaydi;
d) koordinata aylantirish egri chiziqni kanonik koʻrinishga keltiradi;
e) invariantlar va koordinata usullari birgalikda eng samarali natijani beradi.

Umuman olganda, olingan natijalar invariantlar yordamida ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlash va klassifikatsiya qilish matematik jihatdan sodda, universal va samarali usul ekanligini koʻrsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.
12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424