PROYEKTIV GEOMETRIYANING PREDMETI, NAZARIY ASOSLARI, INVARIANTLARI VA ANALITIK TADQIQ USULLARI

Abdumalikova Anora Axmadjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.19881280

Annotatsiya. Ushbu maqolada proyektiv geometriyaning predmeti, nazariy asoslari, invariantlari va analitik tadqiq usullari o'rganiladi. Natijalarda proyektiv fazoning tuzilishi, dualizm prinsipi, invariantlarning asosiy xossalari va analitik ifodalari aniqlashtirildi. Shuningdek, bu tushunchalarning chizma geometriya, kompyuter grafika va optik modellashtirishdagi qo'llanishi tahlil qilindi. Xulosa sifatida proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni umumlashtiruvchi fundamental nazariya ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: proyektiv geometriya, invariant, gomogen koordinatalar, ikki nisbat, dualizm, proyektiv fazo, transformatsiya, analitik usul.

ПРЕДМЕТ, ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ, ИНВАРИАНТЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация: В данной статье исследуются предмет, теоретические основы, инварианты и аналитические методы исследования проективной геометрии. В результатах уточнены структура проективного пространства, принцип двойственности, основные свойства инвариантов и их аналитические выражения. Кроме того, проанализировано применение данных понятий в начертательной геометрии, компьютерной графике и оптическом моделировании. В заключение показано, что проективная геометрия представляет собой фундаментальную теорию, обобщающую геометрические структуры посредством инвариантов.

Ключевые слова: проективная геометрия, инвариант, однородные координаты, двойное отношение, двойственность, проективное пространство, преобразование, аналитический метод.

SUBJECT, THEORETICAL FOUNDATIONS, INVARIANTS AND ANALYTICAL METHODS OF INVESTIGATION IN PROJECTIVE GEOMETRY

Abstract: This paper examines the subject, theoretical foundations, invariants, and analytical methods of investigation in projective geometry. The results clarify the structure of projective space, the principle of duality, the fundamental properties of invariants, and their analytical expressions. Furthermore, the application of these concepts in descriptive geometry, computer graphics, and optical modelling is analysed. As a conclusion, it is demonstrated that projective geometry constitutes a fundamental theory that generalises geometric structures through invariants.

Keywords: projective geometry, invariant, homogeneous coordinates, cross-ratio, duality, projective space, transformation, analytical method.

Kirish

Proyektiv geometriya - geometrik obyektlarning tasvirlash jarayonlarida saqlanib qoluvchi xossalarini oʻrganuvchi matematik nazariya boʻlib, u klassik Evklid geometriyasining umumlashgan shakli hisoblanadi. Ushbu geometriyada asosiy e'tibor masofa va burchak kabi metrik kattaliklarga emas, balki **incidensiya munosabatlari** va **invariantlarga** qaratiladi.

Proyektiv fazo tushunchasi gomogen koordinatalar orqali aniqlanadi. Proyektiv tekislikdagi nuqta quyidagicha ifodalanadi:

$$(x: y: z), (x, y, z) \neq (0,0,0)$$

va quyidagi ekvivalentlik bajariladi:

$$(x: y: z) \sim (\lambda x: \lambda y: \lambda z), \lambda \neq 0$$

Bu yondashuv nuqtalarni koordinata masshtabidan mustaqil ravishda qarash imkonini beradi va cheksizlikdagi nuqtalarni tabiiy ravishda kiritadi.

Proyektiv geometriyaning asosiy transformatsiyalari chiziqli almashtirishlar orqali beriladi:

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det T \neq 0$$

bu yerda T- uch oʻlchamli matritsa. Ushbu transformatsiyalar quyidagi muhim xossaga ega: toʻgʻri chiziqlar $\longrightarrow$ toʻgʻri chiziqlar. Proyektiv geometriyaning eng muhim invariantlaridan biri - **ikki nisbat (cross-ratio)** hisoblanadi. Agar A, B, C, Dnuqtalar bir chiziqda yotsa:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Bu kattalik quyidagi invariantlik xossasiga ega:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

ya'ni har qanday proyektiv akslantirish ostida oʻzgarmaydi.

Maxsus holatda: $(A, B; C, D) = -1$ boʻlsa, nuqtalar garmonik toʻrtlik hosil qiladi. Bu konfiguratsiya proyektiv geometriyada muhim rol oʻynaydi.

Proyektiv geometriyaning yana bir fundamental prinsipi - **dualizm** hisoblanadi: nuqta $\leftrightarrow$ toʻgʻri chiziq. Bu prinsip orqali har bir teorema uchun unga dual teorema mavjud boʻladi.

Proyektiv geometriyaning nazariy asoslari invariantlar orqali geometrik obyektlarning mohiyatini aniqlashga imkon beradi. Bu esa analitik tadqiq usullarini qoʻllash orqali yanada chuqur tahlil qilish imkonini yaratadi. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi proyektiv geometriyaning predmeti, nazariy asoslari, invariantlari va analitik tadqiq usullarini tizimli ravishda oʻrganishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, proyektiv geometriya aksiomatik va analitik yondashuvlar birligida qaraladi va invariantlar orqali umumlashtiriladi.

Shunday qilib, proyektiv geometriya invariantlar yordamida geometrik strukturalarni chuqur anglash imkonini beruvchi fundamental matematik nazariya hisoblanadi.

Metod

Mazkur tadqiqot proyektiv geometriyaning predmeti, nazariy asoslari va invariantlarini oʻrganishga qaratilgan boʻlib, aksiomatik metod, gomogen koordinatalar, matritsali transformatsiyalar va analitik geometriya usullari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida proyektiv fazo $\mathbb{P}^2$va undagi nuqta hamda toʻgʻri chiziqlar qaraldi.

Metodologiyaning boshlangʻich nuqtasi sifatida nuqtalarni gomogen koordinatalar orqali ifodalash qabul qilindi:

$$(x: y: z) \sim (\lambda x: \lambda y: \lambda z), \lambda \neq 0$$

Bu yondashuv orqali proyektiv fazoda cheksizlikdagi nuqtalar ham tabiiy ravishda kiritildi va geometrik tizim yopiq shaklga keltirildi.

Proyektiv transformatsiyalar quyidagi umumiy koʻrinishda qaraldi:

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det\, T \neq 0$$

bu yerda T- chiziqli operator. Ushbu transformatsiyalarni matritsali koʻrinishda tahlil qilish orqali quyidagi asosiy xossa tekshirildi:

$$\text{kollinearlik saqlanadi}$$

Metodologiyada asosiy invariant sifatida ikki nisbat (cross-ratio) ishlatildi. Bir toʻgʻri chiziqda yotuvchi nuqtalar uchun:

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \div \frac{AD}{BD}$$

Bu kattalikning invariantligi quyidagicha tekshirildi:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Analitik tahlilda koordinata usuli qoʻllanilib, nuqtalar quyidagicha parametrlandi:

$$A = 0, B = 1, C = c, D = d$$

Bu holda ikki nisbat:

$$(A, B; C, D) = \frac{c}{c-1} \div \frac{d}{d-1}$$

koʻrinishda yozildi va invariantlik tekshirildi.

Metodologiyada garmonik toʻrtlik maxsus invariant holat sifatida qaraldi:

$$(A, B; C, D) = -1$$

Bu shart ichki va tashqi boʻlinishlar orqali quyidagicha ifodalandi:

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

Dualizm prinsipi metodologiyaning muhim qismi sifatida qoʻllanildi:

$$\text{nuqta} \leftrightarrow \text{toʻgʻri chiziq}$$

Bu yondashuv teoremalarni umumlashtirish va ikki tomonlama tekshirish imkonini berdi.

Analitik tadqiq usullarida quyidagi algebraik vositalar ishlatildi: determinantlar, matritsalar, chiziqli transformatsiyalar, koordinata almashtirishlar.

Proyektiv tekislik quyidagicha kengaytirilgan fazo sifatida qaraldi:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{cheksizlikdagi nuqtalar}\}$$

Bu orqali parallel chiziqlar kesishuvchi sifatida qaraldi:

$$\text{parallel chiziqlar} \Rightarrow \text{cheksizlikda kesishadi}$$

Metodologiyada perspektiv akslantirishlar ham tahlil qilindi. Agar nuqtalar bir nuqtadan proyeksiyalansa, ularning asosiy invariantlari saqlanishi koʻrsatildi.

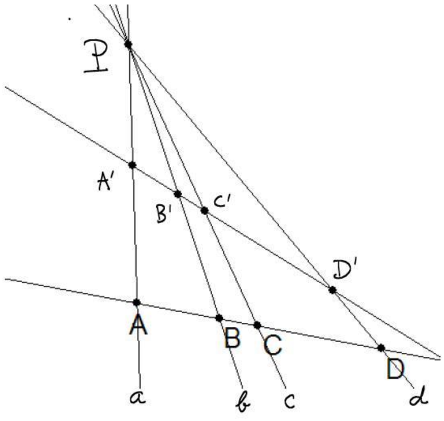
Shuningdek, quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$\text{geometrik obyekt} \longrightarrow \text{analitik model} \longrightarrow \text{invariant}$$

Bu model orqali: nuqta va chiziq → gomogen koordinatalar, koordinatalar → matritsa, matritsa → invariantlar oʻzaro bogʻlandi.

Shunday qilib, qoʻllanilgan metodologiya proyektiv geometriyani analitik vositalar yordamida oʻrganish, invariantlarni aniqlash va ularning geometrik mazmunini ochib berish imkonini berdi.

Mazkur chizmada proyektiv geometriyaning analitik modeli va uning asosiy invariant xossalari tasvirlangan.



Chizmada quyidagi asosiy elementlar aks etadi:

Gomogen koordinatalar orqali nuqta:

$$(x:y:z), (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Proyeksiya jarayoni: bir nuqtadan chiqayotgan nurlar orqali tekislikka tasvirlash

Proyektiv transformatsiya: $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}, \det T \neq 0.$

Kollinearlikning saqlanishi: bir chiziqda yotgan nuqtalar proyeksiyada ham bir chiziqda qoladi

Asosiy invariant - ikki nisbat: $(A,B;C,D) = (A',B';C',D')$.

Bu chizmada to'rtta nuqta bir chiziqda olinib, boshqa chiziqqa proyeksiyalanadi va ularning o'zaro nisbatlari o'zgarmasligi vizual ko'rsatiladi.

gomogen koordinatalar ⇒ proyektiv transformatsiya ⇒ invariant (cross-ratio)

Muhokama

Olingan natijalar proyektiv geometriya geometrik obyektlarni invariantlar orqali o'rganishga asoslangan universal nazariya ekanligini ko'rsatdi. Bu yondashuv klassik metrik geometriyadan farqli ravishda, shakl va o'lchovdan mustaqil bo'lgan chuqur strukturaviy xossalarni aniqlash imkonini beradi.

Muhokamada aniqlanishicha, proyektiv geometriyada asosiy e'tibor quyidagilarga qaratiladi: incidensiya va invariantlar. Bu esa geometrik obyektlarning "ko'rinishi" emas, balki "mohiyati"ni o'rganishga imkon beradi.

Ikki nisbat (cross-ratio): $(A,B;C,D)$ proyektiv geometriyaning eng muhim invariantlaridan biri sifatida barcha transformatsiyalar ostida saqlanishi bilan alohida ahamiyat kasb etadi. Bu invariant orqali to'rtta nuqtaning joylashuvi to'liq aniqlanadi.

Muhokamada garmonik to'rtlik: $(A,B;C,D) = -1$ maxsus simmetrik konfiguratsiya sifatida baholandi va u geometrik konstruksiyalarda muhim rol o'ynashi ko'rsatildi.

Dualizm prinsipi: nuqta ↔ to'g'ri chiziq nazariyaning ichki simmetriyasini ifodalaydi va matematik tahlilni sezilarli darajada soddalashtiradi. Bu prinsip orqali ko'plab teoremalar avtomatik ravishda kengaytiriladi.

Proyektiv geometriyaning yana bir muhim jihati - cheksizlikdagi nuqtalar tushunchasi hisoblanadi: parallel chiziqlar ⇒ cheksizlikda kesishadi. Bu yondashuv geometriyani yopiq tizimga aylantiradi va turli maxsus holatlarni yagona modelga birlashtiradi.

Analitik usullar nuqtai nazaridan, gomogen koordinatalar va matritsali transformatsiyalar proyektiv geometriyani algebraik shaklda ifodalash imkonini beradi: $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$. Bu esa geometrik masalalarni algebraik tenglamalar orqali yechish imkonini yaratadi. Muhokamada yana bir muhim jihat - proyektiv geometriyaning umumlashtiruvchi roli hisoblanadi: Evklid ⊂ affin ⊂ proyektiv. Bu ierarxiya geometriyaning rivojlanish bosqichlarini ko'rsatadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur anglash imkonini beruvchi, zamonaviy fan va texnologiyada keng qo'llaniladigan fundamental nazariya ekanligini ko'rsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda proyektiv geometriyaning predmeti, nazariy asoslari, invariantlari va analitik tadqiq usullari tizimli ravishda oʻrganildi. Olingan natijalar shuni koʻrsatdiki, proyektiv geometriya geometrik obyektlarning asosiy xossalarini invariantlar orqali aniqlovchi fundamental matematik nazariya hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- proyektiv transformatsiyalar geometrik obyektlarning joylashuvini oʻzgartiradi, lekin invariantlarni saqlaydi;
- ikki nisbat proyektiv geometriyaning asosiy invariantidir;
- gomogen koordinatalar analitik tadqiqning asosiy vositasi hisoblanadi;
- dualizm prinsipi nazariy umumlashtirish imkonini beradi;
- proyektiv geometriya boshqa geometrik tizimlarni umumlashtiradi.

Umuman olganda, olingan natijalar proyektiv geometriya invariantlar orqali geometrik strukturalarni chuqur tushuntiruvchi va analitik usullar bilan oʻrganiladigan universal nazariya ekanligini koʻrsatdi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ʻpo ʻlchovli yevklid fazosi: o ʻqitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424