HZTTRMY
HOZIRGI ZAMON TA'LIM-TARBIYA TIZIMINI
RIVOJLANTIRISH: MUAMMO VA YECHIMLAR"
XALQARO ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA
DENOV, 10-OKTABR 2025 YIL
in-academy.uz

О ПАРАСТРОФАХ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИГРУПП

А.А.Давлатбеков
Таджикский Технический Университет Имени Академика М.С.Осими
Тел: (+992) 93-457-77-27. Email: akimbekd@mail.ru
https://doi.org/ 10.5281/zenodo.17331010

Аннотация

Дар ин макола баъзе хосиятҳои парастрофҳои квазигуруҳи хаттӣ оварда шудааст ва ибот шудааст, ки парастрофҳои квазигуруҳи хаттӣ бо ёрии айнияти иловагӣ квазигуруҳи медиалӣ мебошанд.

Калимањои калидї: квазигуруњи хаттӣ, квазигуруҳи медиалӣ, автоморфизм, парастроф, квазиавтоморфизм.

Аннотация

В данной статье представлены некоторые свойства парастрофы линейных квазигрупп и доказано, что парастрофы линейных квазигрупп являются медиальными квазигруппами с помощью дополнительного тождества.

Ключевые слова: линейная квазигруппа, медиальная квазигруппа, автоморфизм, парастрофа, квазиавтоморфизм.

Annotation

This article presents some properties of the parastrophe of linear quasigroups and proves that the parastrophes of linear quasigroups are medial quasigroups using an additional identity.

Key words: linear quasigroup, medial quasigroup, automorphism, parastrophe, quasi-automorphism.

Сведения об автора: Давлатбеков Акимбек Авалбекович - к.ф.м.н., кафедра высшая математика Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими

Теор ия линейных квазигруп занимает одно из центральных мест в общей теории квазигрупп. Как и в других областях математики, идея линейности играет важную роль в теории квазигрупп. Эта идея используется при определении линейных квазигрупп. Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *линейной* над группой $(Q, +)$, если она имеет вид $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$, где $\varphi, \psi \in Aut\,(Q,+)$, c - фиксированный элемент из множества Q [1]

Большинство классических классов квазигрупп являются линейными или обобщенными линейными квазигруппами. Например, CH-квазигруппы (теорема Манина [2]), медиальные квазигруппы (теорема Тоёды [3, с.223]), дистрибутивные квазигруппы Штейнера, левые дистрибутивные квазигруппы (теорема Белоусова - Онои, [4, с.142]), дистрибутивные квазигрупп (теорема Белоусава, [5, с.270]), T-квазигруппы, *n*- арные группы (теорема Глускина-Хоуссу [6, с.89; 7; 8, с. 188]), *n*- арные медиальные квазигруппы (теорема Эванс [9, с.134] и теорема Белоусова [10]), являются квазигруппами такого типа.

В.Д.Белоусов ввел линейные квазигруппы (над групами) в середине 1960-х годов [11, с.67]. В 1970-х годов, линейные квазигруппы над абелевыми группами (T-квазигруппы) и некоторые другие классы обобщенные линейные квазигруппы интенсивно изучали Т.Кепка, П.Немес, Я.Джезек, В.Д.Белоусов и другие математики.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ с тождеством

$(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$ (3)

называется медиальным. Основная теорема Тойоды ([1, 2, 4–6]) утверждает, что любую медиальную квазигруппу $(Q, \cdot)$ можно представить в виде:

$x \cdot y = \varphi x + \psi y + c$, (2)

где $(Q, +)$— абелева группа, φ, ψ — автоморфизмы $(Q, +)$ такие, что $\varphi\psi = \psi\varphi$, $x, y \in Q$, c — некоторый фиксированный элемент из множества Q.

Ввиду теоремы Тойоды теория медиальных квазигрупп очень близка к теории абелевых групп, но это не совсем теория абелевых групп. Например, очень простой для абелевых групп факт о том, что каждая простая абелева группа конечна, для медиальных квазигрупп был доказан только в 1977 году [7].

Медиальные квазигруппы, как и другие классы квазигрупп, изотопных группам, дают возможность строить квазигруппы с заранее заданными свойствами. Часто эти свойства можно выразить на языке свойств групп и компонентов изотопии.

Как обычно, $L_a : L_a x = a \cdot x$ и $R_a : R_a x = x \cdot a$ представляют собой соответственно левый и правый сдвиг квазигруппы $(Q, \cdot)$. Элемент d такой, что d · d = d, называется идемпотентным элементом бинарной квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Квазигруппа $(Q, \circ)$ называется изотопом квазигруппы $(Q, \cdot)$, если существуют перестановки α, β, γ множества Q такие, что $x \circ y = \gamma^{-1}(\alpha x \cdot \beta y)$ для всех $x, y \in Q$. Если $(Q, \circ) = (Q, \cdot)$, то тройка (α, β, γ) является автотопией квазигруппы $(Q, \cdot)$, перестановка γ является квазиавтоморфизмом квазигруппы $(Q, \cdot)$.

С каждой квазигруппой $(Q, \cdot)$ связаны пять квазигрупп, которых называют парастрофами квазигруппы $(Q, \cdot)$ [7]. Поясним этот факт. Если обозначим квазигрупповую операцию квазигруппы $(Q, \cdot)$ через A, то операцию A можно ассоциировать следующими квазигруповыми операциями:

$A(x_1, x_2) = x_3 \Leftrightarrow A(12)(x_2, x_1) = x_3 \Leftrightarrow A(13)(x_3, x_2) = x_1 \Leftrightarrow A(23)(x_1, x_3) = x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(132)(x_2, x_3) = x_1 \Leftrightarrow A(123)(x_3, x_1) = x_2$. Это означает, что $A_\sigma\,(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}) = x_{\sigma 3}$

$\Leftrightarrow A(x_1, x_2) = x_3$, где $\sigma \in S = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$- группа подстановок третьего порядка. Таким образом, для квазигруппы $(Q,\ A)$ существуют следующие пять парастрофов:

1) $A^{((12))} = A^{*} = A^{s}$,

2) $A^{((13))} = {}^{-1}A = {}^{l}A$,

3) $A^{((23))} = A^{-1} = A^{r}$,

4) $A^{((123))} = {}^{-1}\left(A^{-1}\right) = {}^{l}\left({}^{r}A\right) = {}^{\alpha}A = {}^{s}\left({}^{l}A\right)$,

5) $A^{((123))} = \left({}^{-1}A\right)^{-1} = {}^{r}\left({}^{l}A\right) = {}^{\beta}A = {}^{s}\left({}^{r}A\right)$.

Пусть $(Q, \cdot)$ линейная квазигруппа $x \cdot y = \varphi x + c + \psi y$

1) $x \overset{(12)}{\cdot} y = \varphi y + c + \psi x$;

2) $x \overset{(12)}{\cdot} y = \varphi^{-1} x + IJ_{I\varphi^{-1}c}\varphi^{-1}\psi y + I\varphi^{-1}c$, где $IJ_{I\varphi^{-1}c}x = \varphi^{-1}c + x + \varphi^{-1}c$;

3) $x \overset{(23)}{\cdot} y = I\psi^{-1}\varphi x + \psi^{-1} y + I\psi^{-1} c$;

4) $x \overset{(123)}{\cdot} y = \varphi^{-1} y + IJ_{I\varphi^{-1}c}\varphi^{-1}\psi x + I\varphi^{-1} c$;

5) $x \overset{(132)}{\cdot} y = I\psi^{-1}\varphi y + \psi^{-1} x + I\psi^{-1} c$;

её парасртроф.

Теорема. Пусть квазигруппа $(Q,\cdot)$ изотопны абелева группа $(Q,+)$. Квазигруппа $(Q,\backslash)$: $x \backslash y = \varphi^{-1} x + \; + J\varphi^{-1}\psi\, y + J\varphi^{-1} c,$ является медиальной квазигруппа тогда и только тогда, когда в $(Q,\cdot)$ выполняется следующие тождества

$$(x/y)/(v/u) = (x/u)/(v/y). \qquad (4)$$

Доказательство. Учитывая полученные соотношения переходим в равенстве (4) к групповой операции

$$(x/y)/(v/u) = \varphi^{-1}(x/y) + J\varphi^{-1}\psi(v/u) + J\varphi^{-1} c = \varphi^{-1}\left(\varphi^{-1} x + J\varphi^{-1}\psi\, y + J\varphi^{-1} c\right) +$$
$$+ J\varphi^{-1}\psi\left(\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1}\psi\, u + J\varphi^{-1} c\right) + J\varphi^{-1} c =$$
$$= \varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, y + J\varphi^{-2} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, u + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1} c.$$
$$(x/u)/(v/y) = \varphi^{-1}(x/u) + J\varphi^{-1}\psi(v/y) + J\varphi^{-1} c = \varphi^{-1}\left(\varphi^{-1} x + J\varphi^{-1}\psi\, u + J\varphi^{-1} c\right) +$$
$$+ J\varphi^{-1}\psi\left(\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1}\psi y + J\varphi^{-1} c\right) + J\varphi^{-1} c =$$
$$= \varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, u + J\varphi^{-2} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, y + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1} c.$$
$$\varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, y + J\varphi^{-2} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, u + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1} c =$$
$$= \varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, u + J\varphi^{-2} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} c + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, y + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v + J\varphi^{-1} c. \qquad (7)$$

При $c = 0$. Тогда равенство (7) имеет вид

$$\varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, y + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, u + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v = \varphi^{-2} x + J\varphi^{-2}\psi\, u + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\, y + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1} v \qquad (8)$$

Заменяя в (8), $x \to \varphi^2 x,\; y \to J\psi^{-1}\varphi y,\; u \to \psi^{-1}\varphi u,\; v \to J\varphi\psi^{-1}\varphi v$, тогда получим

$$\varphi^{-2}\varphi^2 x + J\varphi^{-2}\psi J\psi^{-1}\varphi y + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi\psi^{-1}\varphi u + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}J\varphi\psi^{-1}\varphi v =$$
$$= \varphi^{-2}\varphi^2 x + J\varphi^{-2}\psi\psi^{-1}\varphi u + \varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}\psi J\psi^{-1}\varphi y + J\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}J\varphi\psi^{-1}\varphi v$$
$$x + \varphi^{-1} y + \varphi^{-1}\psi\, u + v = x + J\varphi^{-1} u + \; J\varphi^{-1}\psi y + v.$$

После сокращений

$$\varphi^{-1} y + \varphi^{-1}\psi\, u = J\varphi^{-1} u + \; J\varphi^{-1}\psi y \qquad (9)$$

Если $y = 0,\; \varphi^{-1}\psi = J\varphi^{-1},\; \psi = \varepsilon.$ Если $u = 0,\; \varphi^{-1} = J\varphi^{-1}\psi,\; \varepsilon = \psi,$ то из (9) получаем

$$\varphi^{-1} y + \varphi^{-1} u = \varphi^{-1} u + \varphi^{-1} y \qquad (10)$$

Откуда заменяя y и u соответственно на $y \to \varphi y$ и $u \to \varphi u$ получаем

$$y + u = u + y,$$

То есть $(Q,+)$ абелева.

Литература:

1. Белоусов, В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппа \В.Д. Белоусов\\ – Мат. Сборник. – 1966.- Т.70. - №112.- С.55-97.
2. Манин, Ю.И. Кубические формы /Ю.И.Манин- М.Наука -1972.-125С.
3. Toyoda, K. On axioms of linear functions \K. Toyoda \\ Proc. Imp. Acad. Tokyo. -1941.- Vol.17.- Pp. 221–227.
4. Belousov V.I. On loops that are isotopic to left distributive Quasigroups \ V.I. Belousov, V.D. Onoi \\ Mat. Issled.- 1972- T.3. - №25. - Pp.135–152.
5. Белоусов, В.Д. О дистрибутивных квазигрупп \ В.Д. Белоусов \ Мат дискрет.- 1958.-Т.13.-№3- Pp. 268–297.
6. Hosszu, A. On the explicit form of n-group operations \ A. Hosszu \\ Publ. Math. Debrecen. – 1963. – Vol.10. – Pp. 88–92.
7. Gluskin, L.M. Positional operatives\ L.M. Gluskin \\ Mat. Issled.- 1965. T.110. – Pp. 444–472.
8. Sokolov, E.I. On the Gluskin-Hosszu theorem for D¨ornte n-groups \ E.I.Sokolov \\ Mat. Issled.- 1976. - T.39.- Pp. 187–189.
9. Evans, T. Abstract mean values \ T.Evans\\ Duke Math. - 1963.- T.30. –Pp. 331–347,
10. Belousov, V.D. n-Ary Quasigroups\ V.D. Belousov \\ Stiintsa. Kishinev.- 1971.
11. Belousov, V.D. Balanced identities on quasigroups\ V.D. Belousov \\ Mat. Issled. - 1966. –T.70.- Pp.55–97