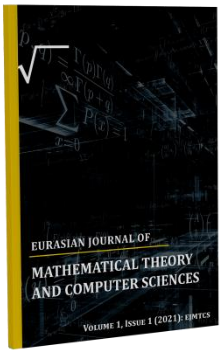
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СТАХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА (ПО СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ)

Х.М.Маматов
Университет общественной безопасности Республики Узбекистан
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7781176

ARTICLE INFO
Received: 20th March 2023
Accepted: 28th March 2023
Online: 29th March 2023
KEY WORDS

ABSTRACT

Пусть X – пространство непрерывных справа кусочно-постоянных функции $x=\left\{x_t,\, t\in R^+\right\}$ таких, что $x_0=0$

$x_t<\infty$

$x_t=x_{t^-}+0$ или 1 для всех $t<\infty$.

Определение. Заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\, F,\, P)$ случайный процесс $Z=(Z_t,\, F_t)$ принадлежащими пространству X, будем называть точечным процессом.

Всякий точечный процесс $Z=(Z_t,\, F_t)$ локально ограничен и имеет непрерывные справа неубывающие траектории.

Поэтому всякий точечный процесс $Z=(Z_t,\, F_t)$ имеет следующее разложение

$$Z_t=M_t+A_t$$

где $M=(M_t,\, F_t)$, $t\in R^+$ – локальный мартингал с непрерывными справа траекториями, а $A=(A_t,\, F_t)$, $t\in R^+$ – предсказуемый возрастающий процесс, которого называют компенсатором точечного процесса $Z=(Z_t,\, F_t)$.

Рассмотрим последовательность пар точечных процессов $\left(X^n, Y^n\right) = \left(X_t^n, Y_t^n\right)_{t\geq 0}$ относительно $\left(F^n, P\right)$ $X_0^n = Y_0^n = 0$ и со следующими разложениями:

$$X_t^n = M_t^n + A_t^n$$

и

$$Y_t^n = N_t^n + B_t^n.$$

Рассмотрим также пару пуассоновских процессов $\left(X, Y\right) = \left(X_t, Y_t\right)_{t\geq 0}$, $X_0 = Y_0 = 0$ с компенсаторами $\lambda_1 t$ и $\lambda_2 t$.

Для под интегральных функции h^n и h мы будем предлагать, что они имеют следующую структуру

$$h_t^n = f^n\left(t, X_{t-}^n\right),\ h_t = f\left(t, X_{t-}\right).$$

$f^n\left(t,x\right)$ – функции измеримые по паре переменных, $n\geq 1$, $f\left(t,x\right)$ – непрерывная функция $\left(t,R\right)\in R^+\times R$. Для того чтобы гарантировать факт существования стохастических интегралов мы будем всегда дополнительно считать что $h^n = f^n\left(t, X_{t-}^n\right)$, $t\geq 0$, являются локально ограниченными.

Через V^+ подмножества пространства D, состоящих из неубывающих функции.

Определение. Случайный процесс $\tau = \left(\tau_t\right)_{t\geq 0}$ принадлежащий классу V^+ и такой, что τ_t момент остановки (относительно семейства $F = \left(F_t\right)_{t\geq 0}$) для каждого $t\geq 0$, называется случайной заменой времени.

С каждым процессом $X\in D\cap F$ и случайной заменой времени $\tau = \left(\tau_t\right)_{t\geq 0}$ можно связать новый процесс $\hat{X}$, пологая

$$\hat{X}_t\left(\omega\right) = X_{\tau_t(\omega)}\left(\omega\right),\ t\geq 0.$$

С семейством F и τ свяжем также новый поток σ - алгебра $\hat{F} = \left(\hat{F}_t\right)_{t\geq 0}$

$\hat{F}_t = F_{\tau_t}$.

Рассмотрим $\hat{X}^n = \left(\hat{X}_t^n, F_t^n\right)$ и $\hat{Y}^n = \left(\hat{Y}_t^n, \hat{F}_t^n\right)$, $\hat{X}_t^n = \hat{X}_{\tau_t^n}^n$, $\hat{Y}_t^n = \hat{Y}_{\tau_t^n}^n$,

$\hat{F}_t^n = F_{\tau_t^n}^n$, где $\tau_t^n = \left(\tau_t^n\right)_{t\geq 0} \in V^+$.

При формулировке теорем будем пользоваться следующими условиями:

$$A_{\tau^n(t)}^n \xrightarrow{P} \lambda_1 t$$

(B1) $$B_{\tau^n(t)}^n \xrightarrow{P} \lambda_2 t$$

(B2) $$\left\langle M^n, N^n \right\rangle_{\tau_t^n} \xrightarrow{P} \left\langle M, N \right\rangle_t$$

(B3) $$\int_0^{\tau_t^n} \left| f^n\left(s, X_{s-}^n\right) - f\left(s, X_{s-}^n\right) \right| dB_s^n \xrightarrow{P} 0$$

(B4) $$\int_0^{\tau_t^n} \left| f^n\left(s, X_{s-}^n\right) - f\left(s, X_{s-}^n\right) \right| d\left\langle N^n \right\rangle_s \xrightarrow{P} 0.$$

Теорема. Пусть выполнены условия (B1), (B2), (B3) и (B4). Тогда имеет место слабая сходимость в топологии Скорохода в пространстве D

$$\int_0^{\tau_t^n} f^n\left(s, X_{s-}^n\right) dY_s^n \xrightarrow{P} \int_0^t f\left(s, X_{s-}\right) dY_s.$$

При доказательстве теорем используется следующие леммы.

Лемма. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда

$$\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right) \xrightarrow{D_f} \left(X, Y\right).$$

Доказательство леммы . Для доказательство достаточно показать, что для $c_1, c_2 \in R$

$$Ee^{ic_1 X_t^n + ic_2 Y_t^n} \to Ee^{ic_1 X_t + ic_2 Y_t}.$$

Обозначим

$u_t = e^{ic_1 X_t}$ и $z_t = e^{ic_2 Y_t}$

Вычислим скачки u_t и z_t

$$\Delta u_t = u_{t-}\left(e^{ic_1 \Delta X_t} - 1\right) = u_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\Delta X_t,$$

$$\Delta z_t = z_{t-}\left(e^{ic_1 \Delta Y_t} - 1\right) = z_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\Delta Y_t.$$

Тогда

$$\Delta u_t \Delta z_t = u_{t-} z_{t-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right)\Delta X_t \Delta Y_t.$$

По формуле Ито (замени переменных)

$$du_t z_t = u_{t-} dz_t + z_{t-} du_t + d\left[u, z\right]_t$$

Так как

$$du_t = u_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right) dX_t$$

$$dz_t = u_{t-}\left(e^{ic_2} - 1\right) dY_t.$$

Следовательно

$$u_t z_t = 1 + \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1} - 1\right) dX_s + \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_2} - 1\right) dY_s +$$

$$+ \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right) d\left[X, Y\right].$$

Далее

$$Eu_t z_t = 1 + \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\lambda_1 dt + \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_2} - 1\right)\lambda_2 dt +$$

$$+ \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right) d\left\langle X, Y\right\rangle.$$

Тогда

$$Ee^{ic_1 X_t + ic_2 Y_t} = Ee^{\left(e^{ic_1} - 1\right)\lambda_1 t} \cdot e^{\left(e^{ic_2} - 1\right)\lambda_2 t} + \left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right)\left\langle X, Y\right\rangle_t.$$

Для доказательства $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right) \xrightarrow{D_f} \left(X, Y\right)$ достаточно убедиться в ней для каждого конечного временного интервала. Зафиксируем некоторое T и будем обозначать $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right) \xrightarrow{D_f(T)} (X,Y)$ сходимость конечномерных распределений $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right)$ к конечномерным распределениям (X,Y) на $[0,T]$.

Пусть

$$G^n_{\tau^n_t}(c_1,c_2) = \left(e^{ic_1}-1\right)A^n_{\tau^n_t} + \left(e^{ic_2}-1\right)B^n_{\tau^n_t} + \left(e^{ic_1+ic_2}-e^{ic_1}-e^{ic_2}+1\right)\left\langle M^n, N^n\right\rangle_{\tau^n_t}.$$

Тогда из теоремы 5.1.3 [1] следует, что достаточно проверить

$$e^{G^n_{\tau^n_t}(c_1,c_2)} \xrightarrow{P} e^{G_t(c_1,c_2)}$$

где

$$G_t(c_1,c_2) = \left(e^{ic_1}-1\right)\lambda_1 t + \left(e^{ic_2}-1\right)\lambda_2 t + \left(e^{ic_1+ic_2}-e^{ic_1}-e^{ic_2}+1\right)\left\langle M, N\right\rangle_t.$$

Для этого достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$G^n_{\tau^n_t}(c_1,c_2) \xrightarrow{P} G_t(c_1,c_2)$$

из условий (B1) и (B2) вытекает последнее выражения.

Доказательство теоремы.

Для доказательство теоремы покажем следующее

$$\sup_{s\le t}\left|\int_0^{\tau^n_s} f^n(s, X^n_{s_n})dy^n_s - \int_0^{\tau^n_s} f(s, X^n_s)dy^n_s\right| \xrightarrow{p} 0$$

при $n \to \infty$.

для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$P\left(\sup_{s\le t}\left|\int_0^{\tau^n_s} f^n(s, X^n_{s_n})dy^n_s - \int_0^{\tau^n_s} f(s, X^n_s)dy^n_s\right| > \varepsilon_1\right) \le$$

$$\le P\left(\int_0^{\tau^n_s}\left|f^n(s, X^n_{s_n}) - f(s, X^n_s)\right| d\,|B^n_s| > \frac{\varepsilon_1}{2}\right) +$$

$$+ P\left(\sup_{s\le t}\left|\int_0^{\tau^n_s}\left(f^n(s, X^n_{s_n}) - f(s, X^n_s)\right)dN^n_s\right| > \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \qquad (1)$$

Из условия (B3) первое слагаемое (1) при $n \to \infty$ сходится к нулю.

Для второго слагаемого в (1) из неравенство Ленгляра для любого $\varepsilon_2 > 0$ имеем

$$P\left(\sup_{s\le t}\left|\int_0^{\tau_s^n}\left(f^n(s,X_{s_n}^n)-f(s,X_s^n)\right)dN_s^n\right|>\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\le$$

$$\le\frac{4\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}+P\left(\int_0^{\tau_t^n}\left(f^n(s,X_{s\_}^n)-f(s,X_{s\_}^n)\right)^2 d\langle N\rangle_s>\varepsilon_2\right)\le$$

Из условия (B4) следует, что при $n\to\infty$ второе слагаемое в (1) сходится к нулю.

В работе [4] доказано, что из условия (B1) и (B2) следует слабая сходимость в топологии Скорохода в пространстве D

$$\int_0^{\tau_t^n} f(s,X_{s_n}^n)dy_s^n \xrightarrow{D} \int_0^t f(s,X_s)dy_s$$

Теорема доказана.

References:

1. Липцер Р.Ш, Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.Наука. 1986. -512 с.
2. Маматов Х.М. О слабой сходимости стохастических интегралов по семимартингалам // Успехи мат. наук. – 1986. – Т. 41. -N5. – С. 187-188.
3. Маматов Х.М., Мирзаева М.М., Исомиддинов М.Ш. Слабая сходимость стохастических интегралов Лебега-Стильтьеса // "Ilm-fan taraqqiyotida zamonaviy metodlarning qo'llanilishi" mavzusidagi ilmiy onlayn konferensiya to'plami. №28, 27.12.2022 – С. 133-137.
4. Маматов Х.М. Слабая сходимость стохастических интегралов по точечным процессам. Eurasian journal of mathematical theory and computer sciences. DOI:https //in-www.doi.org/10.37547/ejmtcs-v03-i02-p1-05.
5. Ostanov K., Turaev U.Ya., Rakhimov B.Sh. The study of the concept of "random size" and the law of distribution //BBK 72 S127. - 2019.
6. Nematov A. R., Rakhimov B. Sh., Turaev U. Ya. Sushchestvovanie i edinsennost solution of nonlinear equations volterra //Uchenyy XXI veka. - 2016. - T. 6.