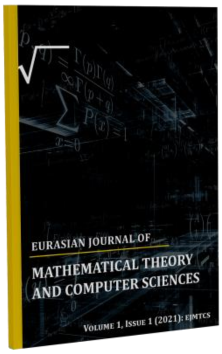
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЫБОРКИ

Хамдамов И.М.
Университет общественной безопасности Республики Узбекистан

https://www.doi.org/10.37547/ejmtcs-v03-i02-p1-06

ARTICLE INFO
Received: 09th February 2023
Accepted: 16th February 2023
Online: 17th February 2023
KEY WORDS

ABSTRACT

Экстремальные значения выборки имеют многочисленные применения в различных отраслях науки и техники, экономики, актуарной математики, теории надежности (особенно при оценке надежности работы промышленных и сельскохозяйственных объектов), медицине и так далее. Асимптотический анализ порядковых статистик является важным при оценивании неизвестных параметров распределения и при определении критической области в проверке статистических гипотез, в частности, если границы области равномерного распределения зависят от неизвестных оцениваемых параметров, то оценки строятся с помощью крайних членов вариационного ряда, и они являются состоятельными, асимптотически несмещенными оценками и достаточными статистиками.

Настоящая работа посвящена выяснению вклада экстремальных членов вариационного ряда в поведение суммы независимых случайных величин и определена вклад экстремальных слагаемых в сумму случайных величин в задачах вероятностей больших уклонений и является продолжением [1-4].

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – последовательность независимых (н.з.) одинаково распределенных случайных величин (с.в.), заданных на одном и том же вероятностном пространстве с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$.

Пусть, далее, $X_n^{(1)} \le X_n^{(2)} \le \dots \le X_n^{(n)}$ – вариационный ряд, построенный в порядке возрастания для выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Результаты упорядочения по абсолютной величине обозначим следующим образом:

$$\left|\overline{X}_n^{(1)}\right| \le \left|\overline{X}_n^{(2)}\right| \le \dots \le \left|\overline{X}_n^{(n)}\right|.$$

Обозначим через $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ сумму случайных величин и положим

$$\overline{S}_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-k} \overline{X}_n^{(j)}, \quad S_n^{(m,k)} = \sum_{j=m+1}^{n-k} X_n^{(j)}.$$

Легко заметить, что $\overline{S}_n^{(k)}$ является результатом удаления k наибольших по абсолютной величине слагаемых из суммы S_n, тогда как $S_n^{(m,k)}$ получается при одновременном удалении m крайних левых и k крайних правых порядковых статистик.

Предположим, что распределение X_1 принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, и пусть

$$P(X_1 < u) = F(u) = \begin{cases} c_1 |u|^{-\alpha} l_1(|u|), & \text{если } u < 0, \\ 1 - c_2 u^{-\alpha} l_2(u), & \text{если } u > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь c_1 и c_2 – положительные постоянные, такие, что $c_1 + c_2 = 1$, а $l_i(u)$, $i = 1,2$, – медленно меняющиеся функции (м.м.ф.), причем $\lim_{u\to\infty} l_1(u)/l_2(u) = 1$ (см. [5])

Приводим основные результаты работы.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1) и правый хвост распределения ведет себя как $1 - F(u) = u^{-\alpha} l(u),\ u > 0,$ а левый – как $F(-u) = o(1 - F(u))$. Тогда предельное распределение усеченной суммы $S_n^{(m.k)}$ совпадает с предельным распределением $\overline{S}_n^{(k)}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n^{(m,k)}}{X_n^{(n-k+1)}} < z \right) = P(\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k < z).$$

Здесь

$$Ee^{it\eta_1} = \frac{1}{1 - h(t)},$$

и

$$h(t) = \begin{cases} \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz} - 1}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 0 < \alpha < 1, \\ it \frac{\alpha}{\alpha - 1} + \alpha \int_0^1 \frac{e^{itz} - 1 - itz}{z^{\alpha+1}} dz, & \text{если } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Аналогичная ситуация имеет место, когда левый хвост распределения ведет себя как $F(u) = |u|^{-\alpha} l(|u|),\ u < 0,$ а правый – как $1 - F(v) = o(F(-v)),\ v > 0$.

Пусть теперь, $F(z; x, y),\ x > 0,\ y > 0,$ – функция распределения безгранично делимых законов, логарифмы характеристических функций которых представимы в виде:

$$h(t;x,y)=\begin{cases}\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\frac{e^{itz}-1}{|z|^{\alpha+1}}dz+\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\frac{e^{itz}-1}{z^{\alpha+1}}dz, \text{ если } 0<\alpha<1;\\ it\frac{\alpha}{\alpha-1}(c_2y^{1-\alpha}-c_1x^{1-\alpha})+\alpha c_1\int\limits_{-x}^{0}\frac{e^{itz}-1-itz}{|z|^{\alpha+1}}dz+\\ +\alpha c_2\int\limits_{0}^{y}\frac{e^{itz}-1-itz}{z^{\alpha+1}}dz, \qquad \text{ если } 1<\alpha<2.\end{cases} \tag{2}$$

Тогда справедлива

Теорема 2. Если выполнено условие (1) и (2), то при $n\to\infty$ справедливо

$$P\left(S_n<zb_n\right)\to\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty P\left(\zeta(x,y)-x\xi_m+y\eta_k<z\right)dG_m^{(1)}(x)dG_k^{(2)}(y),$$

где с.в. $\zeta(x,y)$ имеет ф.р. $F(z;x,y)$, и независимы от ξ_m и η_k, причем с.в. $\xi_m\overset{d}{=}1+e_1+\cdots+e_{m-1},\ \eta_k\overset{d}{=}1+e_1+\cdots+e_{k-1}$ взаимно независимы с.в. выражаются как суммы независимых с.в. $e_j,\ j=1,2,...$, с общим распределением Парето с показателем α. Здесь

$$G_m^{(i)}(u)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{c_iu^{-\alpha}}^{\infty}x^{m-1}e^{-x}dx,\ i=1,2.$$

Полученные результаты в работе могут быть использованы для дальнейшего развития теории порядковых статистик, связанной с характеристической функцией усеченной суммы, теории оценивания носителя распределения, структурной теории точечных процессов.

Практическая значимость исследования определяется применением полученных в работе научных результатов при решении теоретических и практических задач математической статистики, теории массового обслуживания, а также физики, техники и медицины, в которых особенно важным является вклад экстремальных наблюдений.

References:

1. Хамдамов И.М., Маматов Х.М. Совместное предельное распределение крайних левых и крайних правых порядковых статистик, Eurasian Journal of Academic Research, Vol. 3 Issue. 1, Part 3 January 2023 p. 19-24.

2. Teugels J.L., Limit theorems on order statistics, Ann.Probab., 1981, v. 9, No 5, pp.868-880.

3. Нагаев А.В., Хамдамов И.М., О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин, Теор.вероятн. и ее примен., 2002г., том 47, выпуск 3, с. 575-583.

4. Гафуров М.У., Хамдамов И.М., Роль экстремальных порядковых статистик в образовании большого уклонения сумм независимых случайных величин,

Асимптотические методы математической статистики., Ташкент, Фан, 1987г., стр. 38-46.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука,1985, 144с.