



KUCHSIZ SEPARABEL FAZOLARNING TOPOLOGIK
XOSSALARI

Mamatov Jahongir Hamroqulovich

Jizzax politexnika instituti

Oliy matematika kafedrasi assistenti

<https://www.doi.org/10.37547/ejmtcs-v03-i02-p1-01>

ARTICLE INFO

Received: 23th January 2023

Accepted: 31th January 2023

Online: 01st February 2023

KEY WORDS

Separabel fazolar, topologik xossa, kuchsiz zichlik, ochiq to'plam, Xausdorf kompakt fazosi.

ABSTRACT

Ushbu ilmiy maqolada topologiyada muhim fazolardan biri bo'lgan kuchsiz separabel fazoga ta'rif berilgan bo'lib, uning turli topologik xossalari oid teoremlar isbotlab ko'rsatilgan. Xususan, kuchsiz separabel fazolarning to'g'ri yig'indisi va ko'paytmasi yana kuchsiz separabel fazo bo'lishi haqidagi teoremlar isbotlari bilan keltirilgan.

Biz topologik fazoning kuchsiz zichligi $\tau \geq \aleph_0$ deb aytamiz, agar τ eng kichik kardinal son bo'lsa, unda σ markazlashgan ochiq to'plamlar tizimiga to'g'ri keladigan π - baza mavjud, ya'ni, $B = \cup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ π - bazaga ega, bu erda B_α har bir $\alpha \in A$, $|A| = \tau$ uchun ochiq to'plamlarning markazlashgan tizimidir.

X topologik fazoning kuchsiz zichligi $wd(X)$ qisqartmasi orqali ifodalanadi [1]. Agar $wd(X) = \aleph_0$ bo'lsa, u holda X topologik fazo kuchsiz separabel deyiladi.

Agar har bir bo'sh bo'lmagan $U \subset X$ ochiq to'plam uchun $V \subset U$ bo'ladigan $V \in B$ to'plam mavjud bo'lsa, X topologik fazoning bo'sh bo'lmagan B (ochiq) qism to'plamlari oilasi X ning (π - baza) π - to'ri deyiladi, X ning qism to'plamlari oilasi quyidaigicha nomlanadi:

- 1) Markazlashgan, agar har qanday chekli $B_0 \subset B$ qism to'plamlar uchun $\cap B_0 \neq \emptyset$ bo'lsa;
- 2) σ - markazlashgan, agar $B = \cup\{B_i : i \in \omega\}$ bo'lsa, bunda har bir B_i markazlashgan. Keyingi ta'rif V. I. Ponamaryovga tegishli.

1. Ta'rif: Agar X topologik fazo σ - markazlashgan π - baza ga ega bo'lsa kuchsiz separabel fazo deyiladi.

2. Tasdiq. Ixtiyoriy X topologik fazo uchun quyidagi shartlar o'rinli:

- 1) X ning har bir π - baza σ - markazlashgan;
- 2) X kuchsiz separabel;
- 3) X σ - markazlashgan π - to'ri ga ega;
- 4) X ning bo'sh bo'lmagan O qism to'plamlar oilasi σ - markazlashgan.

Isbot: Biz faqat 3) \rightarrow 4) xulosalarni tekshirishimiz etarli.



σ -markazlashgan $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ π - $to'r$ ni olamiz. O qism to'plamlar oilasi:

$$O_i = \{U \in O : bu\ erda\ V \in B_i, V \in U\}$$

π - $to'r$ ning ta'rifiga ko'ra, $O = \bigcup_{i=0}^{\infty} O_i$. B_i markazlashgan bo'lganligi uchun, O_i ham markazlashgan bo'ladi. 2 tasdiq isbotlandi.

Ravshanki, har qanday separabel fazo kuchsiz separabel fazodir. Kuchsiz separabellikning asosiy xususiyatlaridan biri quyidagi tasdiqda o'z ifodasini topgan:

3. teorema: X – Xausdorf kompakt fazosi separabeldir, faqat va faqat shu holdaki X kuchsiz separabel bo'lsa.

$X - Y$ ning qism fazosi bo'lsin. Agar $X - Y$ da zich bo'lsa, biz Y ni X ning topologik kengaytmasi deymiz.

4. Tasdiq. Kuchsiz separabel fazolar sinfi quyidagi topologik operasialarga nisbatan yopiq:

- 1) ochiq qism to'plamlar;
- 2) zich qism to'plamlar;
- 3) topologik davomlashtirish;
- 4) chekli ko'paytmalar
- 5) sanoqli birlashmalar
- 6) uzluksiz aksi (obrazlar)

5. Teorema [5]. Xar bir X kuchsiz separabel fazo e^X separabel kengaytmaga ega.

6. Izoh. Bu qismni natijalarini τ ixtiyoriy kardinal songacha kengaytirish mumkin. Ya'ni, biz ayta olamizki, X fazoning kuchsiz zichligi τ (write $wd(X) \leq \tau$) dan katta emas agar X σ -markazlashgan B_α tizimlari birlashmasi bo'lgan π -*baza* ga ega bo'lsa. Misol uchun, 4. tasdiqni barcha kuchsiz separabel fazolar sinfini barcha X fazolar sinfiga $wd(X) \leq \tau$ orqali umumlashtirish mumkin. 3. teoremaning umumiy ko'rinishini ixtiyoriy Xausdorf X kompakt fazo uchun quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$d(X) = wd(X)$$

7. Misol: X separabel bo'lmagan kuchsiz separabel bo'lgan kompakt T_1 fazo mavjud.

Isbot: X fazo uchun to'plamning quyi chegarasi sifatida barcha sanoqli ordinallarning $Y = \omega_1$ fazosini olishimiz mumkin. Shunda X topologiya Y topologiyada kuchsizlanadi. Ya'ni: X ning bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamlari Y ning kompakt qism to'plamlari to'ldirmalaridir. Ravshanki, bu to'plamlar X to'plamda topologiya tashkil etadi. Bu topologiyada bir nuqtali to'plamlar yopiq, X esa T_1 -fazo bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, X va Y fazolarning topologiyalari Y ning kompakt qism to'plamlari bilan ustma-ust tushadi. Natijada esa X ning yopiq qism to'plamlarining Φ markazlashgan tizimi Y ning kompakt qism to'plamlarining markazlashgan tizimi bo'ladi. Shu sababli Φ bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'ladi. Bu esa X fazoning kompaktiligini ifodalaydi.



Kompakt fazolarning har qanday chekli birlashmasi kompaktligidan X fazoning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plamlari oilasi markazlashgan bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, X kuchsiz separabel, chunki uning markazlashgan bazasi mavjud.

Endi X ning separabel emasligini ko'rsatamiz. X_0 - X ning ixtiyoriy sanoqli qism to'plami bo'lsin. Ma'lumki, $Y = \omega_1$ fazodagi har qanday to'planning yopilmasi (sanoqli) kompaktdir. Shu sababli X_0 to'plam Y fazoning shunday F kompakt qism fazosida yotadi. $U = Y \setminus F$ bo'lsin. U holda X ning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plami bo'lgan $U - X_0$ to'plam bilan kesishmaydi. Demak, X_0 to'plam X da zich emas. Bundan kelib chiqadiki, X separabel fazo emas.

7. misoldan ko'rinadiki, 3. teoremadagi Xausdorf separabellik aksiomasini kuchsizlantira olmaymiz. Kompaktlikka kelsak, uni tasdiq 4. ga ko'ra lokal kompaktlikka qadar kuchsizlantirishimiz mumkin. Quyidagi 2 ta misol shuni ko'rsatadiki, 3. teoremaning tasdig'i sanoqli kompakt fazolar uchun ham, Lindelof fazolari uchun ham o'rinli emas. Bu misollarni tavsiflash uchun biz 2 ta ta'rifni eslab o'tamiz.

$\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ topologik fazolarning yig'indisi bo'lsin va $a = (a_\alpha)$ - X topologik ko'paytmaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\Sigma(a)$ orqali barcha (x_α) nuqtalarga ega X fazoning qism fazosini belgilaymiz, bu erda barcha sanokli $\alpha \in A$ uchun $x_\alpha = a_\alpha$ o'rinli. $\Sigma(a) - X_\alpha$ fazoning a nuqta ustidagi Σ - ko'paytmasi deyiladi. $\Sigma(a)$ ning muhim qism to'plami barcha (x_α) nuqtalarni o'z ichiga oluvchi $\sigma(a)$ (σ - product of X_α over a) to'plamdir. Bu erda $x_\alpha = a_\alpha$ faqat chekli $\alpha \in A$ uchun o'rinli.

Agar X_α topologik gruppaga bo'lsa, $e = (e_\alpha)$ va $e_\alpha - X_\alpha$ ning neytral elementi bo'lsa, $\Sigma(e)$ va $\sigma(e)$ lar ham topologik gruppaga bo'ladi.

8. Misol. Bizga normal, sanoqli kompakt, kuchsiz separabel, ammo separabel bo'lmagan G topologik gruppaga berilgan bo'lsin.

$D_\alpha = \{0_\alpha, 1_\alpha\} - D = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$ gruppaning ko'rinishi bo'lsin. G gruppaga uchun $\alpha \in \omega_1$ bo'lganda $0 = (0_\alpha)$ nol nuqta ustida D_α gruppaning Σ -ko'paytmasini aniqlash mumkin. G gruppaning normalligi [7] da ko'rsatilgan, sanoqli kompakligi esa [12] Pontryagin tomonidan eslatib o'tilgan. Va nihoyat G gruppaning separabel emasligi ko'rsatib berilgan.

9. Izoh. D_α - kontinium gruppalarining Σ -ko'paytmasi separabel emasligi [6] da isbotlangan. Ammo, agar bu isbotni so'zma-so'z takrorlasak, 8. misoldan G gruppaning separabel emasligini isbotlab qo'yamiz.

10. misol. Bizga normal, Lindelof, kuchsiz separabel, ammo separabel bo'lmagan H topologik gruppaga berilgan bo'lsin.

H gruppaga uchun $\alpha \in \omega_1$ bo'lganda nol nuqta ustida D_α gruppaning σ - ko'paytmasini aniqlash mumkin. $H - G$ ning zich qism to'plami bo'lganligi uchun 4. tasdiqga



ko'ra kuchsiz separabeldir. Bundan tashqari, separabel bo'lmagan G gruppaning zich qism to'plami bo'lganligi uchun H separabel emas. Nihoyat, $H - H_n$ sanoqli kompakt to'plamlarning birlashmasi bo'lgan Lindelof fazosidir.

Tixonov X fazosi r -fazo deyiladi, agar $u_i, i \in \omega$ oilalarning sanoqli to'plamlari mavjud bo'lsa va:

- 1) u_i oila βX ochiq qism to'plamlardan tashkil topgan bo'lsa;
- 2) Har qanday $i \in \omega$ nuqta uchun $X \subset \bigcup u_i$ bo'lishi o'rinli;
- 3) Har qanday $x \in X$ nuqta uchun $\bigcap \{St(x, u_i) : i \in \omega\} \subset X$ o'rinli.

Agar mazkur ta'rifda har bir u_i oila bitta ochiq to'plamdan tashkil topgan bo'lsa, unda Chex to'la fazosi deyiladi.

11. Izoh. 10.-misoldagi H gruppada r -fazo emas. Aslida, H gruppada r -fazo deyiladi. Shunday $f : H \rightarrow Y$ metrik (separabel) Y fazoga to'la akslantirish mavjud bo'lsin. Ixtiyoriy $y \in Y$ nuqtani oling. Bu erda $f^{-1}(y)$ akslantirish H gruppada G_δ -kompaktum bo'ladi. Ammo $H - D^{\omega_1}$ da zich. Ammo D^{ω_1} ning kompakt bo'lmagan G_δ qism to'plami H ga tegishli bo'ladi. Biz shu erda ziddiyatga duch kelamiz.

Agar 10. misol va 11. izohga qaraydigan bo'lsak, quyidagi savol ancha qiziqish uyg'otadi:

12. Savol: Har qanday kuchsiz separabel Lindelof p -fazosi separabelmi?

Bu savolga javob bera olmaymiz.

13. Savol: Har qanday kuchsiz separabel, Lindelof, Chex to'la fazosi separabel bo'ladimi?

14. Izoh. Ta'kidlab o'tishimiz kerakki, **8.** va **10.** misollardagi har ikkala fazolar [8] da berilgan (mos ravishda 3.1 va 3.3 misollar). Xuddi shunday 12. va 13. savollar uchun ham o'sha javob to'g'ri ([8], 1-savolga qarang).

Eslatib o'tamiz, agar A qism to'plam $U \subset X$ ochiq to'plamning qoplamasi bo'lsa, X fazoning A qism to'plami regulyar yopiqdir. $\beta\omega \setminus \omega$ - Stoun-Chex to'ldirmasini ω^* orqali belgilaymiz.

15. Izoh. 4. tasdiqdan kelib chiqadiki, kuchsiz separabel fazolarning ochiq va regulyar yopiq qism to'plamlari kuchsiz separabeldir. Ammo uni na G_δ - qism to'plamlarga, na regulyar yopiq qism to'plamlarning chekli kesishmalariga kengaytirib bo'lmaydi. Qarshi misol sifatida $X = X_0 \cup X_1$ separabel kompakt fazoni olishimiz mumkin, bunda shundayki, $X_i - X$ fazoda regulyar yopiq va $X_0 \cap X_1$ esa X fazoda separabel bo'lmagan G_δ to'plamdir. Bunday X kompakt to'plamni $\omega^* \times \{0\}$ va $\omega^* \times \{1\}$ to'plamlarni identifikatsiya qilish orqali $\beta\omega \times \{0,1\}$ dan olish mumkin.

Kompakt bo'lmagan fazolar uchun 8. va 10. misollarni quyidagi yo'l orqali o'zgartirishimiz mumkin.



16. misol: Shunday separabel, sanoqli kompakt, U_0 va U_1 qism to'plamlari ochiq, sanoqli kompakt, birlashmaydigan, separabel bo'lmagan ammo kesishmasi $U_0 \cap U_1$ kuchsiz separabel bo'lgan Tixonov X fazosi mavjud.

Isbot: $Y_i = \beta\omega \times \{i\}$, $i = 0, 1$ bo'lsin. $a \in \omega$ nuqtani belgilaymiz. Y ni faktor fazo ekanligidan biz $Y = Y_0 \cup Y_1$ ga ega bo'lamiz.

17. Tasdiq. X -kuchsiz separabel fazo va bo'lsin $f : X \rightarrow Y$ - uzluksiz ustiga akslantirish bo'lsin. U holda Y ham kuchsiz separabel fazo bo'ladi.

Isbot. f - ustiga akslantirish bo'lganligi uchun har qanday $y \in Y$ nuqta uchun $f^{-1}(y)$ proobraz (qayta akslantirish)- X da bo'sh bo'lmagan qism to'plamdir. Har bir $x \in f^{-1}(y)$ nuqta uchun shunday O_x atrof mavjudki, bu erda O_x - kuchsiz separabel. f - ochiq akslantirish bo'lganligi uchun $f(O_x)$ ham Y da y nuqtani o'z ichiga olgan ochiq to'plam bo'ladi. f - uzluksiz akslantirish bo'lganligi sababli $f(O_x)$ to'plam Y da kuchsiz separabeldir. 17. Tasdiq isbotlandi.

18. Tasdiq. X - separabel va $G - X$ ning qandaydir qism to'plami bo'lsin. Agar G quyidagi shartlarning hech bo'lmaganda bittasini qanoatlantirsa kuchsiz separabel bo'ladi, ya'ni:

A) $G - X$ da ochiq b) $G - X$ da hamma joyda zich v) $G - X$ da kanonik yopiq.

Isbot. A) $G - X$ ning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plami bo'lsin. Ta'rifga ko'ra har qanday $x \in G$ nuqta uchun $O_x \in X$ atrof mavjud bulib, bu O_x atrof kuchsiz separabeldir. U holda $O_x \cap G = O'_x$ - x nuqtani o'zichiga olgan G dagi bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamdir. Kuchsiz separabel fazoning har qanday ochiq qism to'plami kuchsiz separabel bo'lganligi uchun O'_x ham kuchsiz separabeldir.

B) $M \subset X$ - X fazoning hamma joyda zich qism to'plami bo'lsin. Ixtiyoriy $y \in M$ nuqtani qaraymiz. X kuchsiz separabel bo'lganligi uchun y nuqtaning shunday $O_y \subset X$ atrofi mavjud bulib, bunda O_y ham kuchsiz separabel. $O_y \subset M = O'$ ni tekshiramiz. U holda O' - M ning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plami. Bundan tashqari $O' \subseteq O$ va O' qism to'plamlar O_y atrofda hamma joyda zich. Kuchsiz separabel fazoning hamma joyda zich bo'lgan har qanday qism to'plami ham kuchsiz separabel bo'lganligi uchun O'_y ham kuchsiz separabeldir.

V) $G - X$ fazoning kanonik yopiq qism to'plami bo'lsin. U holda shunday U ochiq to'plam mavjudki, $G = [U]$ bo'ladi. A) punkt nuqtai nazari bo'yicha qaralganda U - kuchsiz separabel. Ixtiyoriy $z \in G$ nuqta va uning kuchsiz separabel bo'lgan $O_z \subset X$ atrofini qaraylik. U holda $O'_z = O' \cap G$ - G to'plamning bo'sh bo'lmagan ochiq qism to'plami bo'ladi. $V = O_z \cap U$ ni tekshirsak, modomiki kuchsiz separabel fazoning barcha ochiq qism to'plamlari kuchsiz separabel bo'lar ekan, u holda V ham kuchsiz separabeldir. Boshqacha qilib aytganda V



to'plam O'_z da hamma joyda zichdir. 17.-tasdiqga ko'ra z nuqtaning O'_z atrofi kuchsiz separabel bo'ladi. 18. Tasdiq isbotlandi.

19. Teorema: Agarhar bir $s \in S$ va $|S|=2^m$ uchun $wd(X_s) \leq m \geq \aleph_0$ bo'lsa, u holda $wd(\prod_{s \in S} X_s) \leq m$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Tasavvur qilaylik, X_s bo'sh bo'lmagan to'plamlar va $|S|=2^m$ bo'lsin, hamda A_s to'plamlar X_s to'plamlarning mos zich qism to'plami va $|A_s| \leq m$ bo'lsin. U holda $\prod_{s \in S} A_s$ dekart ko'paytma kardinalligi m dan oshmaydigan ($\leq m$) zich qism to'plamni o'z ichiga oladi. $f_s - D(m)$ diskret fazoning A_s ga nisbatan ixtiyoriy akslantirish va $f = \prod_{s \in S} f_s$ dekart ko'paytma $[D(m)]^{2^m}$ ning $\prod_{s \in S} A_s$ ga usluksiz obrazi bo'lganligi uchun $wd([D(m)]^{2^m}) \leq m$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ikkita nuqtali m -chi darajali diskret fazoni T orqali belgilaylik. So'ngra $|T|=2^m$ va $w(T) \leq m$ ga ega bo'lamiz. T ning B bazasini qaraylik, bu yerda $|B| \leq m$ va B ning kesishmaydigan $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ chekli oilalari to'plamini T orqali belgilaymiz, aniqroq aytsak $|T| \leq m$ bo'ladi.

$[D(m)]^{2^m} = \prod_{t \in T} Y_t$ (har bir $t \in T$ uchun $Y_t = D(m)$) dekart ko'paytmada T dan $D(m)$ gacha bo'lgan barcha f funksiyalardan tashkil topgan A qism to'plamni olamizki, bunda f har bir U_i va $T \setminus (U_1, U_2, \dots, U_k)$ to'plamda o'zgarmas bo'ladi. $|T| \leq m$ bo'lganligi uchun $|A| \leq m$ bo'ladi.

A to'plam $[D(m)]^{2^m}$ dekart ko'paytmada zich ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni har bir bo'sh bo'lmagan ochiq $V \subset \prod_{t \in T} Y_t$ qism to'plam uchun $A \cap V \neq \emptyset$ bo'ladi. $\bigcap_{i=1}^k P_{t_i}^{-1}(y_i) \subset V$ ni qanoatlantiruvchi $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, (bunda $i \neq j$ uchun $t_i \neq t_j$) va $y_1, y_2, \dots, y_k \in D(m)$ nuqtalarni qaraylik. T - Xausdorf fazosi bo'lganligi uchun shunday $\{U_1, U_2, \dots, U_k\} \in T$ oila mavjud bo'ladi (bu yerda har bir $i=1, 2, \dots, k$ uchun $t_i \in U_i$). T dan $D(m)$ gacha bo'lgan

$$f(t) = \begin{cases} y_i, & \text{agar har bir } i = 1, 2, \dots, k \text{ uchun } t \in U_i \text{ bo'lsa,} \\ y_1, & \text{agar } t \in T \setminus (U_1, U_2, \dots, U_k) \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bilan aniqlangan f funksiya A va V ga ham tegishli bo'lganligi uchun $A \cap V \neq \emptyset$ bo'ladi. 19. Teorema isbotlandi.

Ta'rif 20. X topologik fazoning kuchsiz zichligi $\tau \geq \aleph_0$ ga teng, agar τ shunday eng kichik kardinal son bo'lsaki, X topologik fazo ochiq to'plamlarning τ markazlashgan sistemasiga bo'linib ketadigan π -bazaga ega bo'ladi, ya'ni $B = \cup \{B_\alpha : \alpha \in A\}$ - π -baza, B_α - har bir $\alpha \in A$, $|A| = \tau$ uchun ochiq to'plamlarning markazlashgan sistemasi.

Yuqorida keltirib o'tilganidek X topologik fazoning kuchsiz zichligi $wd(X)$ orqali ifodalanadi. Agar $wd(X) = \aleph_0$ bo'lsa, X topologik fazo kuchsiz separabel deyiladi.

Agar $wd(X) = \tau$ bo'lsa, X topologik fazo τ -zich deyiladi.

Tasdiq 21. X topologik fazo τ kuchsiz zichlikka ega bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar X topologik fazoda to'plamlarning τ markazlashgan tizimlar birlashmasiga ajraladigan π -to'r mavjud bo'lsa.

Isbot. Zaruriylik sharti. Har qanday π -baza - π -to'r bo'lib hisoblanadi.

Yetarlilik sharti. X topologik fazoda $\gamma = \cup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A, |A| = \tau\}$ - π -to'r va har bir γ_α markazlashgan bo'lsin. $\sigma_\alpha = \{U : U \subset X \text{ da ochiq va bir nechta } V \in \gamma_\alpha \text{ ni o'z ichiga olsin}\}$. Bundan kelib chiqadiki, σ_α oila markazlashgan bo'ladi. $\gamma = \cup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A, |A| = \tau\}$ tizim X topologik fazoda π -baza bo'lishini ko'rsatamiz. W - X topologik fazodagi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam bo'lsin. U holda shunday $\alpha \in A$ va $V \in \gamma_\alpha$ mavjudki, $V \subset W$ bo'lganligi uchun γ - X topologik fazoning π -to'ri bo'ladi. U holda $W \in \sigma_\alpha = \{U : U \subset X \text{ da ochiq va bir nechta } V \in \gamma_\alpha \text{ ni o'z ichiga oladi}\}$. Shunday qilib,



σ – ochiq to'plamlarning τ markazlashgan tizimiga ajraladigan X topologik fazodagi barcha bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamlardan tashkil topgan, ya'ni $wd(X) = \tau$. Tasdiq 21. isbotlandi.

Tasdiq 22. $d(X) = \tau \geq \aleph_0$ bo'lsin. U holda $wd(X) \leq \tau$ bo'ladi.

Isbot: $d(X) = \tau$ bo'lsin, ya'ni X topologik fazoda uning $M = \{a_\alpha: \alpha \in A, |A| = \tau\}$ qism to'plami mavjud bo'lsin, bu yerda $[M]_X = X$. X topologik fazoning a_α nuqtani o'z ichiga oluvchi barcha ochiq qism to'plamlari tizimini σ_α orqali belgilaylik, ya'ni $\sigma_\alpha = \{U_s^\alpha: a_\alpha \in U_s^\alpha \text{ va har bir } \alpha \text{ uchun } U_s^\alpha \text{ } X \text{ da ochiq}\}$. σ_α dan, ya'ni $\sigma = \cup \{\sigma_\alpha: \alpha \in A\}$ dan tashkil topgan σ tizimni ko'rib chiqamiz.

1. σ tizim X topologik fazoda π -baza ekanligini aniqlaymiz. Haqiqatan, G – X topologik fazodagi ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan ochiq to'plam bo'lsin. M to'plamning hamma joyda zich ekanligidan shunday $a_\alpha \in M$, $a_\alpha \in G$ nuqta mavjud bo'ladi. G to'plamning ochiq bo'lganligi uchun a_α nuqta G to'plamning ichki nuqtasi hisoblanadi, shuning uchun $U_s^\alpha \in \sigma_\alpha \in \sigma$, bu yerda $U_s^\alpha \subset G$ bo'ladi. Demak, σ tizim X topologik fazoda π -baza ekan.

2. Endi har bir $\alpha \in A$ nuqta uchun σ_α oila markazlashgan tizimga ega ekanligini ko'rsatamiz. σ_α oilaning ixtiyoriy $U_{s_1}^\alpha, \dots, U_{s_k}^\alpha$ elementlarini olamiz. σ_α ning ta'rifidan $a_\alpha \in \cap \{U_{s_i}^\alpha: i=1, \dots, k\} \neq \emptyset$ ekanligi ma'lum. Demak, har bir $\alpha \in A$ uchun σ_α markazlashgan. Biz $wd(X) \leq \tau$ ekanligini isbotladik. Tasdiq 22 isbotlandi.

Quyidagi tasdiq zichlik, kuchsiz zichlik va Suslin soni orasida munosabat o'rnatadi.

Tasdiq 23. Har qanday X topologik fazo uchun

$$c(X) \leq wd(X) \leq d(X)$$

munosabatga ega bo'lamiz.

Isbot: $c(X) \leq wd(X)$ ekanligini ko'rsatamiz. $wd(X) = \tau \geq \aleph_0$ bo'lsin, ya'ni X topologik fazoda $B = \cup \{B_\alpha: \alpha \in A, |A| = \tau\}$ - π -baza bo'ladi va har bir $\alpha \in A$ uchun $B_\alpha = \{U_{s_k}^\alpha: s_k \in A_\alpha\}$ oila – ochiq to'plamlarning markazlashgan tizimidir. Buning aksini faraz qilsak, X topologik fazoning Suslin soni $c(X) = \tau > \tau$ ga teng bo'ladi. U holda X topologik fazoda $\gamma = \{G_\beta: \beta \in B, |A| = \tau > \tau\}$, bu yerda $G_\beta \cap G_{\beta'} = \emptyset, \beta \neq \beta'$ bo'sh bo'lmagan dizyunkt ochiq to'plam mavjud bo'ladi. Har bir ochiq $G_\beta \in \gamma$ to'plam uchun shunday $U_s^\alpha \in B_\alpha$ to'plam mavjudki, bu yerda $U_s^\alpha \in G_\beta$, chunki B sistema X topologik fazoda π -bazaga ega. B_α ning markazlashganligidan kelib chiqadiki, turli G_α to'plamlarda B sistemaning markazlashgan π -bazaligiga zid keladigan B_α dan farqli U_s^α to'plam mavjud bo'lishi mumkin.

$wd(X) \leq d(X)$ tengsizlik 22. tasdiqdan kelib chiqadi. 23. tasdiq isbotlandi.

Quyidagi teorema shuni ko'rsatadiki, bikompakt xausdorf fazosi uchun zichlik va kuchsiz zichlik mos keladi.

Teorema 24. X – bikompakt xausdorf fazosi bo'lsin. U holda quyidagi munosabat o'rinli:

$$wd(X) = d(X)$$

Isbot. 22. tasdiqdan $wd(X) \leq d(X)$ tengsizlik kelib chiqadi. $d(X) \leq wd(X)$ ekanligini ko'rsatamiz. $wd(X) = \tau$ va $B = \cup \{B_\alpha: \alpha \in A, |A| = \tau\}$ - X topologik fazodagi π -baza bo'lsin. $\mu_\alpha = \{[U]_X: U \in B_\alpha\}$ tizimni ko'rib chiqamiz. U holda μ_α – X bikompakt xausdorf fazosi yopiq qism to'plamlarining markazlashgan tizimi bo'ladi. U bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'ladi.

$x_\alpha \in \cap \{[U]_X: U \in B_\alpha\}$ bo'lsin. $X_0 = \{x_\alpha: \alpha \in A, |A| = \tau\}$ munosabatni o'rnataylik. X_0 ning X topologik fazoda hamma joyda zichligini ko'rsatamiz. V – X topologik fazoning bo'sh bo'lmagan ochiq



qism to'plami bo'lsin. U holda X bikompakt regulyar fazoda $[U]_X \subset V$ ekanligi tufayli shunday bo'sh bo'lmagan W ochiq to'plam topiladi. B - π -baza bo'lganligi uchun $\alpha \in A$ va $U_s^\alpha \in B_\alpha$ topiladi, bu yerda $U_s^\alpha \subset W$. U holda $[U_s^\alpha]_X \subset [W]_X \subset V$ bo'ladi. $x_\alpha \in V$ bo'lganligidan $x_\alpha \in [U_s^\alpha]_X$ ekanligi ma'lum. Teorema 24. isbotlandi.

Natija 25. Bikompakt X fazo separabeldir faqat va faqat u kuchsiz separabel bo'lganda.

Natija 26. X - to'la regulyar fazo bo'lsin va bX - uning ixtiyoriy bikompakt kengaytmasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi:

$$wd(X) = d(bX)$$

Isbot. X - to'la regulyar fazo bo'lsin. X fazo bX da hamma joyda zich bo'lganligi $wd(X) = wd(bX)$ bo'ladi. bX bikompakt ekanligidan $wd(bX) = d(bX)$ tenglik kelib chiqadi. Shuning uchun $wd(X) = d(bX)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Tasdiq 22 isbotlandi.

XULOSA

Mazkur ilmiy maqolada kuchsiz separabel fazolarlarning topologik xossalari haqida so'z yuritilgan va boshqa bir qancha muhim xossalari o'rganilgan.

References:

1. A.V. Arhangel'skii: On one class of spaces containing all metric and all locally compact spaces, Matem. Sbornik 67:1(1965), 55-85.
2. R.B. Beshimov: On some properties of weakly separable spaces, Uzbek. Math. Journ. 1 (1994), 7-11 (in Russian).
3. Ф. Г. Мухамадиев: О локальной слабой τ -плотности топологических пространств. Math-Net.ru. Вестник Томского Государственного университета, 2021
4. W.W. Comfort: An example on density character, Arch. Math. 14 (1963), 422- 423.
5. R. Engelking: General Topology, Warszawa, 1977.
6. N.A. Shanin: On the product of topological spaces. Trudy Steklov Inst. 24, Moscow, 1948.