



TEKISLIKDA KILLING VEKTOR MAYDONLAR GEOMETRIYASI

N. T. Abriyev

Jizzax politexnika instituti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7567226>

ARTICLE INFO

Received: 14th January 2023

Accepted: 23th January 2023

Online: 24th January 2023

KEY WORDS

Yevklid tekisligi, vektor maydon, Killing vektor maydon, Killing vektor maydon oqimi, harakatlar gruppasi, infenitizimal yasovchisi, integral chizig'i.

ABSTRACT

Bu maqolada ikki o'lchovli Yevklid tekisligida Killing vektor maydonlar geometriyasi o'rganilgan. Killing vektorlar oqimi hosil qilgan akslantirishlar nuqtalar orasidagi masofani saqlaydi. Shuning uchun harakatlar gruppalarining infenitizimal yasovchilari Killing vektor maydonlar bo'ladi.

Ta'rif 1. R^2 fazoning har bir $M(x_1, x_2)$ nuqrasiga $\{\xi_1, \xi_2\}$ vektor mos qo'yuvchi $X(x_1, x_2) \rightarrow \{\xi_1, \xi_2\}$ akslantirishga vektor maydon deyiladi.

Vektor maydonni $X = \{\xi_1, \xi_2\}$ ko'rinishda yoki differensiallanuvchi operator sifatida,

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

ko'rinishida belgilanishi mumkin.

R^2 fazoda $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ chiziq berilgan bo'lsin. U holda bu chiziqning har bir nuqtasida ikkita vektor, ya'ni vektor maydonning shu nuqtadagi vektori va egri chiziqning shu nuqtadagi urunma vektori mavjud bo'ladi.

Ta'rif 2. Agar barcha $t = t_0$ lar uchun $X(\gamma(t_0)) = \gamma'(t_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\gamma(t)$ chiziq X vektor maydonning $\gamma(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i deyiladi.

Agar vektor maydon silliq, ya'ni ξ_1, ξ_2 funksiyalar silliq bo'lsa, fazoning har bir nuqtasidan yagona integral chiziq o'tadi. Natijada quyidagi akslantirishlar oilasini hosil qilamiz: $X^t: (x_1, x_2) \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$. $X^t - X$ vektor maydon oqimi deyiladi.

Ta'rif 3. Agar X vektor maydon oqimi harakatlar gruppasini hosil qilsa, bu vektor maydon Killing vektor maydoni deyiladi.

Misol 1. $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ ushbu vektor maydon oqimi, $X^t(x, y) = (xcost - ysint, xsint - ycost)$ dan iborat. Bu vektor maydon oqimi, koordinatalar boshiga nisbatan burishlardan iborat, harakatlar gruppasini hosil qiladi. Shuning uchun

$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydon Killing vektor maydoniga misol bo'la oladi.

Quyidagi ma'lum teoremani keltiramiz.

Teorema-1. $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydon Killing vektor maydon bo'lishi uchun



$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0;$$

va

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu teorema yordamida fazoda berilgan vektor maydonning Killing vektor maydon bo'lishi yoki bo'lmasligini osongina tekshirib ko'rish mumkin.

Misol 2. Ushbu $X = (2021y + 2022) \frac{\partial}{\partial x} + (2020 - 2021x) \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydonni Killing vektor maydon bo'lish yoki bo'lmasligini tekshirib ko'raylik.

$$\frac{\partial(2021y + 2022)}{\partial x} = \frac{\partial(2020 - 2021x)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(2021y + 2022)}{\partial y} + \frac{\partial(2020 - 2021x)}{\partial x} = 2021 - 2021.$$

Demak, yuqoridagi 1 teorema asosan $X = (2021y + 2022) \frac{\partial}{\partial x} + (2020 - 2021x) \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydon Killing vektor maydon bo'ladi.

Kompleks analiz kursidan ma'lumki, $z(x, y) = u + iv$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari uchun quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

va

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, $z(x, y) = u + iv$ funksiya golomorf funksiya deyiladi. Golomorf funksiyaning shartlari bilan 1 teorema shartlarida o'xshashliklar bor. Golomorf funksiyalar to'plamidan bir qismini ajratib olsak Killing vektor maydonlarini hosil qilishimiz mumkin. Buning uchun qo'shimcha yana bir shart qo'yamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

Bu tengliklardan ko'rinib turibdiki, u funksiya x erkin o'zgaruvchiga bog'liq emas, ya'ni bu funksiya faqatgina y erkin o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi, demak $u = u(y)$. Xuddi shuningdek, v funksiya y erkin o'zgaruvchiga bog'liq emas, ya'ni bu funksiya faqatgina x erkin o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi, demak $v = v(x)$. Yuqoridagi

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

shartni hisobga olsak, quyidagi

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} = const$ ekanligi kelib chiqadi. Chunki bu ifoda o'zgarmas funksiyadan boshqa biror funksiyaga teng bo'lsa, $u = u(y)$ yoki $v = v(x)$ ekanligiga zid bo'lib qoladi. Shuning uchun,



$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} = c$$

deb olib, $u = -cy + a$ va $v = cx + b$ tengliklarni hosil qilamiz. Demak, tekislikda, $z(x, y) = (-cy + a) + i(cx + b)$ ko'inishdagi golomorf funksiya Killing vektor maydonni hosil qiladi. Ya'ni tekislikda barcha Killing vektor maydonlar ko'rinishi

$$X = (-cy + a) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + b) \frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

kabi bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, $X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydon Killing vektor maydon bo'lib, uning oqimi, $\{a, b\}$ vektor bo'ylab parallel ko'chirishlardan iborat bo'ladi. Agar $a = b = 0$ bo'lsa, $X = -cy \frac{\partial}{\partial x} + cx \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydon Killing vektor maydon bo'lib, uning oqimi, koordinata boshiga nisbatan burishlardan iborat bo'ladi.

Endi (1) vektor maydonning integral chizig'ini topamiz. Buning uchun ta'rifga ko'ra ushbu

$$\begin{cases} \dot{x} = -cy + a \\ \dot{y} = cx + b \end{cases} \quad (2)$$

differensial tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} cy = -\dot{x} + a \\ c\dot{y} = -\ddot{x} \\ c\dot{y} = c^2x + bc \\ -\ddot{x} = c^2x + bc \end{cases}$$

Buning uchun quyidagi ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan, chiziqli differensial tenglamani yechamiz:

$$\ddot{x} + c^2x + bc = 0. \quad (3)$$

Bu ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan, chiziqli differensial tenglamani yechish uchun unga mos bir jinsli ikkinchi tartibli, chiziqli differensial tenglamani yechib olamiz:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + c^2x &= 0, \\ x &= e^{kt}, \\ \dot{x} &= ke^{kt}, \\ \ddot{x} &= k^2e^{kt}, \\ k^2e^{kt} + c^2e^{kt} &= 0, \\ k^2 + c^2 &= 0, \\ k &= \pm ci, \end{aligned}$$

$$x = C_1e^{cit} + C_2e^{c(-it)} = \cos ct(C_1 + C_2) + \sin ct(C_1 - C_2).$$

Endi (3) ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan, chiziqli differensial tenglamani yechimini topamiz:

$$\begin{aligned} x &= \cos ct(C_1 + C_2) + \sin ct(C_1 - C_2) + A, \\ c^2A &= -bc, \\ A &= -\frac{b}{c}, \end{aligned}$$

$$x = (C_1 + C_2)\cos ct + (C_1 - C_2)\sin ct - \frac{b}{c}.$$

Hosil qilingan yechim va (2) sistemaning birinchi tenglamasi yordamida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Cy = -C(C_1 + C_2)\sin ct + C(C_1 - C_2)\cos ct + a,$$



$$y = (C_1 + C_2)\sin ct - (C_1 - C_2)\cos ct + \frac{a}{c}.$$

Demak, (2) differensial tenglamalar sistemasini umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2)\cos ct + (C_1 - C_2)\sin ct - \frac{b}{c} \\ y = (C_1 + C_2)\sin ct - (C_1 - C_2)\cos ct + \frac{a}{c} \end{cases}$$

Endi quyidagi boshlang'ich shartlar

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ni hisobga olgan holda integral chiziqni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 - \frac{b}{c} \\ y_0 = -C_1 + C_2 + \frac{a}{c} \end{cases}$$

$$x_0 - y_0 = 2C_1 - \frac{a+b}{c},$$

$$x_0 + y_0 = 2C_2 + \frac{a-b}{c},$$

$$C_1 = \frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{a+b}{2c},$$

$$C_2 = \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{a-b}{2c},$$

$$x = \left(\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{a+b}{2c} + \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{a-b}{2c} \right) \cos ct + \left(\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{a+b}{2c} - \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{a-b}{2c} \right) \sin ct$$

$$- \frac{b}{c} = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \cos ct - \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct - \frac{b}{c},$$

$$y = \left(\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{a+b}{2c} + \frac{x_0 + y_0}{2} - \frac{a-b}{2c} \right) \sin ct - \left(\frac{x_0 - y_0}{2} + \frac{a+b}{2c} - \frac{x_0 + y_0}{2} + \frac{a-b}{2c} \right) \cos ct$$

$$+ \frac{a}{c} = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \sin ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \cos ct + \frac{a}{c}.$$

Demak, (1) vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i quyidagi

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \cos ct - \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct - \frac{b}{c} \\ y(t) = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \sin ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \cos ct + \frac{a}{c} \end{cases} \quad (4)$$

parametrik tenglama yordamida aniqlanadi.

(1) vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i qanday chiziq aniqlashini topaylik. Buning uchun (4) sistemada t parametrni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x + \frac{b}{c} = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \cos ct - \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \\ y - \frac{a}{c} = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \sin ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \cos ct \end{cases}$$

Bu tengliklarni kvadratga ko'tarib qo'shamiz:

$$\left(x + \frac{b}{c} \right)^2 + \left(y - \frac{a}{c} \right)^2 = \left(\left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \cos ct - \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \right)^2 +$$



$$\begin{aligned}
 & + \left(\left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \sin ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \cos ct \right)^2 = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right)^2 \cos^2 ct - \\
 & - 2 \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \cos ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right)^2 \sin^2 ct + \left(x_0 + \frac{b}{c} \right)^2 \sin^2 ct + \\
 & + 2 \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \cos ct + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 ct = \\
 & = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right)^2 (\cos^2 ct + \sin^2 ct) + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right)^2 (\cos^2 ct + \sin^2 ct) - \\
 & - 2 \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \cos ct + 2 \left(x_0 + \frac{b}{c} \right) \left(y_0 - \frac{a}{c} \right) \sin ct \cos ct = \\
 & = \left(x_0 + \frac{b}{c} \right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{c} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Demak, (1) vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i markazi $\left(-\frac{b}{c}, \frac{a}{c}\right)$

nuqtada, radiusi $r = \sqrt{\left(x_0 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a}{c}\right)^2}$ ga teng bo'lgan aylanadan iborat ekan.

Misol 3. $X = (-4y + 16) \frac{\partial}{\partial x} + (4x + 12) \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydonning $(0,0)$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini toping.

Yechish. (4) dan foydalanib berilgan vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini quyidagicha yoza olamiz:

$$\begin{cases} x(t) = (x_0 + 3)\cos ct - (y_0 - 4)\sin ct - 3 \\ y(t) = (x_0 + 3)\sin ct + (y_0 - 4)\cos ct + 4 \end{cases}$$

Yuqorida keltirilganlarni hisobga olib, berilgan vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i, markazi $(-3,4)$ nuqtada, radiusi $r = \sqrt{(x_0 + 3)^2 + (y_0 - 4)^2}$ ga teng bo'lgan aylana ekanligini hosil qilamiz.

Shulardan xulosa qiladigan bo'lsak, $X = (-4y + 16) \frac{\partial}{\partial x} + (4x + 12) \frac{\partial}{\partial y}$ vektor maydonning $(0,0)$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'i markazi $(-3,4)$ nuqtada, radiusi $r = 5$ ga teng bo'lgan aylanadan iborat bo'ladi.

References:

1. A.Ya.Narmanov, J.Aslovov. Geometry of orbit of Killing vektor fields. Uzbek mathematical journal. N 2, 2012, pp 77-85.
2. A.Ya.Narmanov, S. Saitova. On geometry of vektor fields. Journal of Mathematical Sciences (United States). 245(3) 2020, pp 347-352.
3. X.F.Sharipov, B. Boymatov, N. Abriyev. Singular foliation generated by an orbit of family of vektor fields. Advances in Mathematics: Scientific Journal 10 (2021), no.4, 2141-2147 ISSN: 1857-8365 (printed); 1857-8438 (electronic) <https://doi.org/10.37418/amsj.10.4.28g>
4. 4.X. F. Sharipov, N. T. Abriyev, B. Boymatov. "FAZODA KILLING VECTOR MAYDONLAR GEOMATRIYAS". Toshkent Viloyati Chirchiq Davlat Pedagogika Instituti, 2021.
5. Abriyev, N. (2022). FAZODA HARAKATLAR GRUPPASI. Scienceweb academic papers collection.