

**Об асимптотике решений системы нелинейных уравнений диффузии с нелинейными краевыми условиями**

**Урунбаев Ж.Э.**

Эл. адрес: jasururunbayev@gmail.com

кандидат физ.-мат. СамГУ.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7199098>

**ARTICLE INFO**

Received: 27<sup>th</sup> September 2022

Accepted: 08<sup>th</sup> October 2022

Online: 14<sup>th</sup> October 2022

**KEY WORDS**

нелинейная параболическая система, диффузия, критические индексы типа Фуджиты, разрушение, асимптотика.

**ABSTRACT**

*В данной работе мы изучаем асимптотическое поведение автомодельных решений нелинейных параболических уравнения система, связанная с нелокальными краевыми условиями. Построены различные автомодельные решения задачи кросс-диффузии для случая медленной диффузии, являющиеся асимптотиками решений рассматриваемой задачи. Получен главный член асимптотики автомодельных решений.*

В данной работе исследуются качественные свойства решений нелинейной системы уравнений фильтрации, связанных с нелинейными краевыми условиями

$$\begin{cases} u_t = \nabla \left( |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right), & x \in R_+^N, t > 0, \\ v_t = \nabla \left( |\nabla v|^{p_2-2} \nabla v \right), & x \in R_+^N, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = v^{q_1}, & x_1 = 0, t > 0, \\ -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1} = u^{q_2}, & x_1 = 0, t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0, \quad (3)$$

куда  $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$ ,  $p_i > 2$ ,  $q_i > 0 (i = 1, 2)$ ,  $u_0(x)$  а также  $v_0(x)$  —

неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в  $R_+^N$ .

Нелинейные параболические уравнения (1) появляются в различных приложениях в качестве модели биологических популяций, химических реакций, политропной фильтрации, распределения тепла, диффузии и т. д. Например,  $u(x, t)$  а также  $v(x, t)$  представляют собой плотности двух биологических популяций при миграции или температуру двух пористых материалов при распространении тепла [1-4].



В условиях  $p_i > 2$  ( $i = 1, 2$ ) уравнения (1) соответствуют случаю медленной диффузии, а при  $1 < p_i < 2$  ( $i = 1, 2$ ) случай быстрой диффузии. В случае медленной диффузии уравнения (1) являются вырожденными, хорошо известно, что вырожденные уравнения могут не иметь классических решений. Однако локальное во времени существование слабого решения задачи (1.1)–(1.3), определяемого обычным интегральным способом [1,3].

В последние годы интенсивно изучаются задачи о разрушении и глобальных условиях существования, скорости разрушения к нелинейным параболическим уравнениям [5-19]. В частности, критические индексы типа Фуджиты, играющие важную роль при изучении свойств математических моделей различных нелинейных процессов, описываются нелинейными параболическими уравнениями и системой таких уравнений математической физики (см. [1-4] и ссылки в нем).

В [16] Yongsheng Mi, Chunlai Mu и Botao Chen рассматривалась следующая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial u^{n_1}}{\partial x} \right|^{p_1-2} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial x} \right), & x > 0, 0 < T < \infty, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left| \frac{\partial v^{n_2}}{\partial x} \right|^{p_2-2} \frac{\partial v^{m_2}}{\partial x} \right), & x > 0, 0 < T < \infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} - \left. \left| \frac{\partial u^{n_1}}{\partial x} \right|^{p_1-2} \frac{\partial u^{m_1}}{\partial x} \right|_{x=0} = v^{q_1}(0, t), & 0 < T < \infty, \\ - \left. \left| \frac{\partial v^{n_2}}{\partial x} \right|^{p_2-2} \frac{\partial v^{m_2}}{\partial x} \right|_{x=0} = u^{q_2}(0, t), & 0 < T < \infty, \end{cases} \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0. \quad (6)$$

Они показали, что в случае  $n_1 = n_2 = 1$  критический показатель глобального существования и критический показатель Фуджиты равны

$$q_1 q_2 = \frac{(2p_1 - 1 + m_1)(2p_2 - 1 + m_2)}{p_1 p_2} \quad \text{а также} \quad \min \{l_1 - k_1, l_2 - k_2\} = 0, \quad \text{куда}$$

$$k_1 = \frac{(p_2 - 1)p_1 q_1 + (p_1 - 1)(2q_2 + m_2 + 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - (2q_1 + m_1 + 1)(2q_2 + m_2 + 1)},$$

$$k_2 = \frac{(p_1 - 1)p_2 q_2 + (p_2 - 1)(2q_1 + m_1 + 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - (2q_1 + m_1 + 1)(2q_2 + m_2 + 1)},$$

$$l_1 = \frac{k_2 q_1 - k_1 (p_1 + m_1 - 2)}{p_1 - 1}, \quad l_2 = \frac{k_1 q_2 - k_2 (p_2 + m_2 - 2)}{p_2 - 1}.$$



Чжаоинь Сян, Чунлай Му и Юлан Ван [12] изучали задачу (4)-(6) с  $n_i = m_i > 1$  ( $i = 1, 2$ ). Они

$$q_1 q_2 \leq \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)(m_2 + 1)}{p_1 p_2}, \text{ и}$$

доказали, что решения (4)-(6) глобальны, если

$$q_1 q_2 > \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)(m_2 + 1)}{p_1 p_2}.$$

может взорваться за конечное время, если

. В случае

$$q_1 q_2 > \frac{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)(m_2 + 1)}{p_1 p_2},$$

если  $y_1 - r_1 \leq 0$  или же  $y_2 - r_2 \leq 0$ , куда

$$r_1 = \frac{q_1 p_1 (p_2 - 1) + (p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_2 + 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - (p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)(m_2 + 1)},$$

$$r_2 = \frac{q_2 p_2 (p_1 - 1) + (p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - (p_1 - 1)(p_2 - 1)(m_1 + 1)(m_2 + 1)}, \quad y_1 = \frac{q_1 r_2 - m_1 r_1 (p_1 - 1)}{p_1 - 1},$$

$$y_2 = \frac{q_2 r_1 - m_2 r_2 (p_2 - 1)}{p_2 - 1},$$

то все неотрицательные нетривиальные решения (4)-(6) разрушаются за конечное время.

Ванцзюань Ду и Чжунпин Ли [19] изучил следующее единственное уравнение

$$\begin{cases} u_t = \nabla \left( |\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m \right), & (x, t) \in \mathbb{R}_+^N \times (0, +\infty), \\ -|\nabla u^m|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x_1} (0, t) = u^q (0, t), & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}_+^N. \end{cases}$$

Они получают критическая глобальная экспонента существования  $q_0 = 2(p-1)/p$  и критический показатель Фуджиты  $q_c = (1+1/N)(p-1)$ .

Настоящая работа посвящена исследованию условий глобальной разрешимости и неразрешимости во времени решений задачи (1)-(3) на основе автомодельного анализа [2]. Мы строим различные автомодельные суперрешения и субрешения, чтобы получить критическую глобальную кривую существования и критическую кривую типа Фуджиты системы (1)-(3). Получены оценки и асимптотики автомодельных решений задачи (1)-(3).

Введем следующие обозначения

$$\alpha_1 = \frac{q_1 p_1 (p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)},$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2 p_2 (p_1 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{q_1 q_2 p_1 p_2 - 4(p_1 - 1)(p_2 - 1)}$$



$$\beta_1 = \frac{q_1 \alpha_2 - \alpha_1 (p_1 - 1)}{p_1 - 1}, \quad \beta_2 = \frac{q_2 \alpha_1 - \alpha_2 (p_2 - 1)}{p_2 - 1}.$$

### Основные результаты

Рассмотрим следующее автомодельное решение задачи (1)-(3)

$$\begin{cases} u_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_1} \varphi(\xi), \\ v_+(x, t) = (T + t)^{-\alpha_2} \phi(\eta), \end{cases} \quad (7)$$

куда  $\xi = |\zeta|$ ,  $\zeta_1 = (x_1 + h_1)(T + t)^{-\beta_1}$ ,  $\zeta_i = x_i(T + t)^{-\beta_1}$ ,  $\eta = |\theta|$ ,  $\theta_1 = (x_1 + h_2)(T + t)^{-\beta_2}$ ,  $\theta_i = x_i(T + t)^{-\beta_2}$ ,  $(i = 2, \dots, N)$ ,  $T > 0$  и функции  $(\varphi(\xi), \phi(\eta))$  являются решением следующей проблемы

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^{N-1} \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \beta_1 \xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_1 \varphi = 0, \\ \eta^{1-N} \frac{d}{d\eta} \left( \eta^{N-1} \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \right) + \beta_2 \eta \frac{d\phi}{d\eta} + \alpha_2 \phi = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} - \left| \frac{d\varphi}{d\xi} \right|^{p_1-2} \frac{d\varphi}{d\xi} \Big|_{\xi_1=h_1} = \varphi^{q_1}(h_2), \\ - \left| \frac{d\phi}{d\eta} \right|^{p_2-2} \frac{d\phi}{d\eta} \Big|_{\eta_1=h_2} = \varphi^{q_2}(h_1), \end{cases} \quad (9)$$

Определим условия, при которых функции (7) являются ограниченными сверхрешениями задачи (1)-(3). Установлен

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi) = \left( a_1 - b_1 \xi^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1-2}}, \\ \tilde{\phi}(\eta) = \left( a_2 - b_2 \eta^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)^{\frac{p_2-1}{p_2-2}}, \end{cases} \quad (10)$$

куда  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ),  $b_1 = \frac{p_1-2}{p_1} \beta_1^{\frac{1}{p_1-1}} > 0$ ,  $b_2 = \frac{p_2-2}{p_2} \beta_2^{\frac{1}{p_2-1}} > 0$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** Решение системы (20) с компактным носителем имеет асимптотику

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \\ \phi(\eta) = \tilde{\phi}(\eta)(1 + o(1)), \end{cases}$$



когда  $\xi \rightarrow (a_1/b_1)^{\frac{p_1-1}{p_1}}$ ,  $\eta \rightarrow (a_2/b_2)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$ , куда  $\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta)$  определены в (10).

### Численный анализ решения

Теперь построим численную схему на основе метода конечных разностей. Для этого система уравнений (1) аппроксимируется со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по  $t$ . Построен итерационный процесс; на внутренних шагах итерации значения узлов вычисляются методом развертки. Известно, что выбор подходящего начального приближения для итерационного процесса решения нелинейной задачи (1) - (3) в общем случае составляет основную трудность при численном решении задачи. При решении конкретных задач используются функции, отражающие некоторые свойства искомых решений; эти функции получаются на основе качественного анализа задачи. Эта трудность, в зависимости от значения числовых параметров уравнений, преодолевается удачным подбором начальных приближений, для которых в расчетах принимается установленная асимптотическая формула. На основании приведенных выше результатов были проведены численные расчеты. Ниже приведены некоторые численные схемы и результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрим систему уравнений (1) с начальными (3) и граничными условиями (2) и

$$\begin{cases} u(b, t) = \phi_1(t), \\ v(b, t) = \phi_2(t), \end{cases}$$

Для удобства перепишем систему (1)-(3) следующим образом

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( B(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} -K(u) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u^{q_1}(0, t), \\ -B(v) \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v^{q_2}(0, t), \quad t > 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+, \quad (17)$$

Где  $K(u) = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p_1-2}$ ,  $B(v) = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^{p_2-2}$ .

Теперь построим равномерную сетку  $S_h$  на  $x$  с шагом  $h$ :

$$S_h = \{x_i = i \cdot h, h > 0, i = 1, 2, \dots, n, n \cdot h = b\},$$

и временная сетка

$$V_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, \tau > 0, j = 1, 2, \dots, m, m \cdot \tau = T, T > 0\}.$$



Построим разностную схему. Для этого воспользуемся балансовым методом и неявной разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ K_{i+1}(u)(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - K_i(u)(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}) \right], \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ B_{i+1}(v)(v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}) - B_i(v)(v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}) \right], \end{cases} \quad (18)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\begin{cases} u_i^0 = u(x_i, 0), \\ v_i^0 = v(x_i, 0), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (19)$$

$$\begin{cases} -K_1(u) \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = (u_0^j)^{q_1}, \\ -B_1(v) \frac{v_1^{j+1} - v_0^{j+1}}{h} = (v_0^j)^{q_2}, \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (20)$$

$$\begin{cases} u_n^j = \phi_1(t_j), \\ v_n^j = \phi_2(t_j), \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, m. \quad (21)$$

Где  $K(u)$ ,  $B(v)$  рассчитываются по одной из следующих формул

$$a) \begin{cases} K_i(u) = K\left(\frac{u_i + u_{i-1}}{2}\right), \\ B_i(v) = B\left(\frac{v_i + v_{i-1}}{2}\right), \end{cases} \quad (22)$$

$$b) \begin{cases} K_i(u) = \frac{K(u_i) + K(u_{i-1})}{2}, \\ B_i(v) = \frac{B(v_i) + B(v_{i-1})}{2}. \end{cases} \quad (23)$$

Видно, что системы алгебраических уравнений (18) нелинейны относительно  $u^{j+1}$  а также  $v^{j+1}$ . Для численного решения таких систем нелинейных уравнений применимы различные итерационные методы. Мы используем простой метод итерации:



$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ K_{i+1} \binom{s}{u} \left( u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1} \right) - K_i \binom{s}{u} \left( u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1} \right) \right], \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[ B_{i+1} \binom{s}{v} \left( v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1} \right) - B_i \binom{s}{v} \left( v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1} \right) \right], \end{cases} \quad (24)$$

Где  $s = 0, 1, 2, \dots$ .

Известно, что итерационные методы требуют соответствующего начального приближения, обеспечивающего быструю сходимость к точному решению и сохраняющего физический смысл задач. В качестве соответствующих начальных приближений выбраны полученные выше асимптотические формулы.

Значения начальной итерации для каждого временного шага  $u_i^{s+1}, v_i^{s+1}$  берутся с предыдущего временного шага:  $u_i^{j+1} = u_i^j, v_i^{j+1} = v_i^j$ . При счете по итерационной схеме задается точность итерации, при которой процесс продолжается до тех пор, пока не будут выполнены следующие условия

$$\begin{cases} \max_{0 \leq i \leq n} \left| u_i^{s+1} - u_i^s \right| < \varepsilon, \\ \max_{0 \leq i \leq n} \left| v_i^{s+1} - v_i^s \right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Ввести обозначения  $\bar{u}_i = u_i^{j+1}, \bar{v}_i = v_i^{j+1}$ . Тогда разностные уравнения (24) можно записать в виде

$$\begin{cases} A_{1i} \bar{u}_{i-1} - C_{1i} \bar{u}_i + B_{1i} \bar{u}_{i+1} = -F_{1i}, \\ A_{2i} \bar{v}_{i-1} - C_{2i} \bar{v}_i + B_{2i} \bar{v}_{i+1} = -F_{2i}, \end{cases} \quad (25)$$

куда  $A_{1i}, A_{2i}, B_{1i}, B_{2i}, C_{1i}, C_{2i}, F_{1i}, F_{2i}$  с формулами (22) получаются в виде:

$$\begin{aligned} A_{1i}^s &= \frac{\tau}{h^2} K_i \binom{s}{u} = \frac{\tau}{2h^2} \left( \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p_1-2} \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} + \left| \frac{u_{i-1}^{j+1} - u_{i-2}^{j+1}}{h} \right|^{p_1-2} \frac{u_{i-1}^{j+1} - u_{i-2}^{j+1}}{h} \right), \\ A_{2i}^s &= \frac{\tau}{h^2} B_i \binom{s}{v} = \frac{\tau}{2h^2} \left( \left| \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p_2-2} \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} + \left| \frac{v_{i-1}^{j+1} - v_{i-2}^{j+1}}{h} \right|^{p_2-2} \frac{v_{i-1}^{j+1} - v_{i-2}^{j+1}}{h} \right), \end{aligned}$$



$$B_{1i}^s = \frac{\tau}{h^2} K_{i+1} \left( u \right) = \frac{\tau}{2h^2} \left( \left| \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} \right|^{p_1-2} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} + \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p_1-2} \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right),$$

$$B_{2i}^s = \frac{\tau}{h^2} B_{i+1} \left( v \right) = \frac{\tau}{2h^2} \left( \left| \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} \right|^{p_2-2} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} + \left| \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right|^{p_2-2} \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right),$$

$$C_{1i}^s = \frac{\tau}{h^2} \left( K_i \left( u \right) + K_{i+1} \left( u \right) \right) + 1,$$

$$C_{2i}^s = \frac{\tau}{h^2} \left( B_i \left( v \right) + B_{i+1} \left( v \right) \right) + 1,$$

$$F_{1i}^s = u_i^{j+1},$$

$$F_{2i}^s = v_i^{j+1}.$$

Значения конечных ординат на концах отрезка  $0 \leq x \leq b$  можно получить по формуле Милна:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 \approx \frac{-u_2 + 4u_1 - 3u_0}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_n \approx \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h},$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 \approx \frac{-v_2 + 4v_1 - 3v_0}{2h}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_n \approx \frac{3v_n - 4v_{n-1} + v_{n-2}}{2h}.$$

которые считаются более точными.

Для численного решения алгебраических уравнений (25) применяется метод прогонки.

По методу развертки

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \alpha_{1i} (\beta_{1i} + \bar{u}_{i+1}), \\ \bar{v}_i = \alpha_{2i} (\beta_{2i} + \bar{v}_{i+1}), \end{cases} \quad (26)$$

куда  $\alpha_{1i}$ ,  $\alpha_{2i}$ ,  $\beta_{1i}$ ,  $\beta_{2i}$  – коэффициенты, рассчитываемые по формулам:

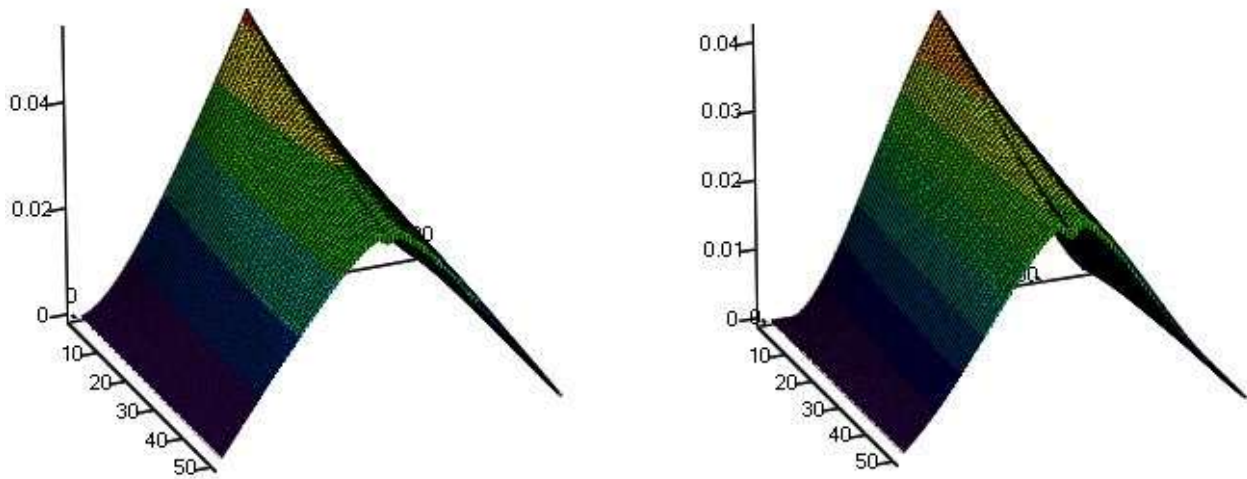
$$\begin{cases} \beta_{1i+1} = \frac{A_{1i} \beta_{1i} + F_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, & \alpha_{1i+1} = \frac{B_{1i}}{C_{1i} - \alpha_{1i} A_{1i}}, \\ \beta_{2i+1} = \frac{A_{2i} \beta_{2i} + F_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, & \alpha_{2i+1} = \frac{B_{2i}}{C_{2i} - \alpha_{2i} A_{2i}}, \end{cases}$$

куда  $i = 1, 2, \dots, n$ . значения  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{20}$ ,  $\beta_{10}$ ,  $\beta_{20}$  находятся из граничных условий (20).

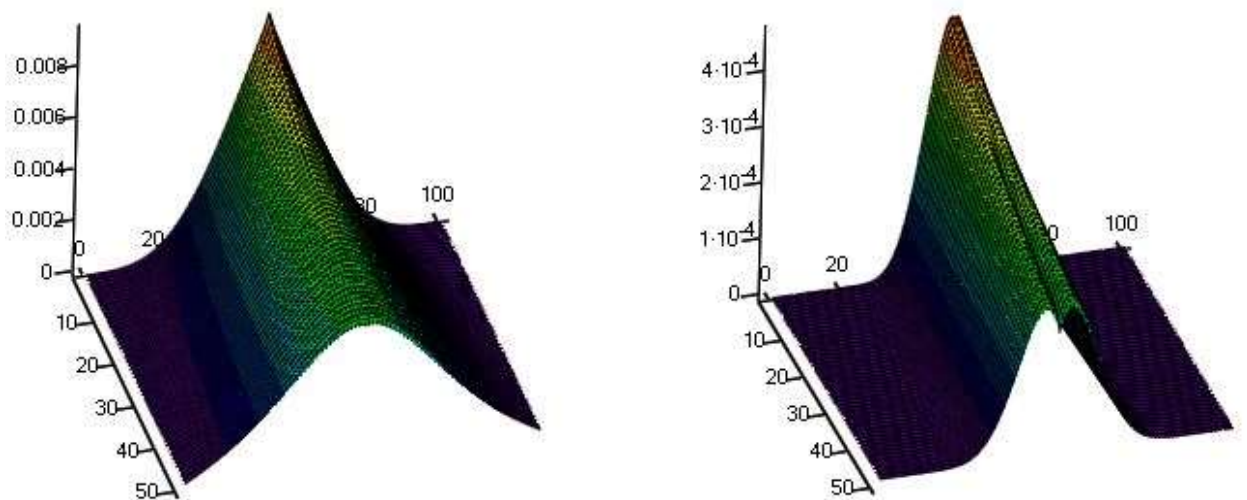
**Численные эксперименты.**

С использованием приведенных выше численных схем был проведен вычислительный эксперимент. Вот некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки достаточно мал  $h = 0,05$ , количество узлов  $N = 2500$ , точность итерации задана как  $\epsilon$ . Счет проводился до  $t = 2$  с шагом  $\tau$ , формулы (10), (13) принимались в качестве начального приближения для итерационного процесса.

Ниже приведены некоторые результаты численных экспериментов при различных значениях числовых параметров и начальных функций.



**Рисунок 1.** Численное решение (1)-(3):  $q_1 = 2.67$ ,  $q_2 = 2.78$ ,  $p_1 = 3.5$ ,  $p_2 = 3.6$ .



**Рис 2.** Численное решение (1)-(3):  $q_1 = 1.36$ ,  $q_2 = 2.0$ ,  $p_1 = 2.2$ ,  $p_2 = 2.1$ .

## References:

1. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L., Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.
2. M. Aripov, Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear Problems, FAN, Tashkent, 1988.
3. A.S.Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order, Russian Math. Surveys, 42, (1987), 169-222.



4. Levine, H., The role of critical exponents in blowup theorems, *SIAM Rev.*, 32(2), 1990, 262-288.
5. F. Quiros and J. D. Rossi. Blow-up sets and Fujita type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear boundary conditions, *Indiana Univ. Math. J.* 50, no. 1, 2001, 629-654.
6. Zheng, S.N., Song, X.F. and Jiang, Z.X., Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux, *J. Math. Anal. Appl.*, 298(1), 2004, 308-324.
7. Xiang, Zhaoyin Mu, Chunlai. Blowup behaviors for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *Commun. Pure Appl. Anal.*, vol. 6, no. 2, 2007, 487-503.
8. Cui, Z.J., Critical curves of the non-Newtonian polytropic filtration equations coupled with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 68(10), 2008, 3201-3208.
9. Li Z.P., Cui Z.J. and Mu C.L., Critical curves for fast diffusive polytropic filtration equations coupled through boundary, *Appl. Anal.*, 87(9), 2008, 1041-1052.
10. Li Z.P. and Mu C.L., Critical curves for fast diffusive non-Newtonian equations coupled via nonlinear boundary flux, *J. Math. Anal. Appl.*, 340(2), 2008, 876-883.
11. Wang Zejia, Zhou Qian, Lou Wenqi. Critical exponents for porous medium systems coupled via nonlinear boundary flux. *Nonlinear Anal.* 71, no. 5-6, 2009, 2134-2140.
12. Zhaoyin Xiang, Chunlai Mu and Yulan Wang. Critical curve of the non-Newtonian polytropic filtration equations coupled via nonlinear boundary flux. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, vol. 39, no. 2, 2009, 689-705.
13. Zhaoyin Xiang. Global existence and nonexistence for diffusive polytropic filtration equations with nonlinear boundary conditions. *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 61, Issue 3, 2010, pp 467-478.
14. Yongsheng Mi, Chunlai Mu, Botao Chen, A nonlinear diffusion system coupled via nonlinear boundary flux, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 376, Issue 2, 15 April 2011, Pages 613-624
15. Xu and Song. Critical parameter equations for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *Boundary Value Problems*, 2011:15, 2011, 1-13.
16. Mi, Y.S., Mu, C.L., and Chen, B.T., Critical exponents for a nonlinear degenerate parabolic system coupled via nonlinear boundary flux, *J. Korean Math. Soc.*, 48(3), 2011, 513-527.
17. Yong-Sheng Mi, Chunlai Mu, and Deng-Ming Liu. Global existence and blow-up for a doubly degenerate parabolic equation system with nonlinear boundary conditions. *Glasgow Math. J.* 54, 2012, 309-324.
18. Mi Yongsheng, Mu Chunlai. Global existence and blow-up of solutions to a class of doubly degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. *Advances in Mathematics (China)*, Vol.43, No.3, 2014, 398-410.
19. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. *Int. Jour. of Math. Anal.* vol. 7, 11, 2013, 517-524