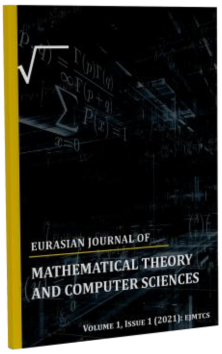
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО – ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Ахметов Куанишбек Низамаддинович
Преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент
https://doi.org/10.5281/zenodo.7180784

ARTICLE INFO

Received: 01st October 2022
Accepted: 05th October 2022
Online: 10th October 2022

KEY WORDS

Уравнение, теория интегральных уравнений Фредгольма

ABSTRACT

Основной целью работы является изучение следующих вопросов: исследование корректности постановок задач Коши, Дарбу и Гурса для уравнений гиперболического и эллиптического типа второго рода с сингулярным коэффициентом. Существование и единственность решения задач Коши и Гурса для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом доказывается методом Римана. При построении решений задач Дарбу применяется метод Римана-Адамара. Изучить задачи Трикоми и Геллерстдта для уравнения гиперболо - эллиптического типа второго рода с сингулярным коэффициентом. При доказательстве единственности решения поставленной задачи используется принцип экстремума, а существования решения задачи доказывается методом интегральных уравнений.

Актуальность работы. Уравнение смешанного типа благодаря приложениям при решении многих важных вопросов прикладного характера как, теория газовая динамика, магнитная гидродинамика, теория электронного рассеивания, теория бесконечно малых изгибаний поверхностей и прогнозирования уровня грунтовых вод, является одним из основных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных, интенсивно развиваются с пятидесятых годов прошлого века.

Целью исследования является исследование вопросов существование и единственности решения краевых задач типа Трикоми и Бицадзе-Самарский для уравнений смешанного типа второго рода с сингулярным коэффицентом.

Объектом исследования являются вырождающиеся уравнения гиперболического, эллиптического и эллиптико – гиперболического типов второго рода с сингулярным коэффицентом.

Предметом исследования являются краевые задачи для вырождающегося эллиптического и гиперболического уравнения, а также краевые задачи для эллиптико – гиперболического уравнения второго рода с сингулярным коэффицентом.

Методы исследований. При доказательстве однозначной разрешимости поставленных краевых задач применяются теория специальных функции, теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода, сингулярные интегральные уравнение нормального типа и теории принципа экстремума, а также методы решения уравнений с частными производными.

Постановка задачи BS

Рассмотрим уравнение

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0/y)u_y=0 \tag{1}$$

в области $D=D_1\cup D_2$, где D_1 - область, ограниченная нормальной кривой $\sigma_0:(x-1/2)^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1/4$ при $y>0$ с концами в точках $A(0,0),\ B(1,0)$ и отрезком $AB(y=0)$, а D_2 - область, ограниченная отрезком AB и характеристиками

$$AC:x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\quad BC:x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения , где постоянные m и β_0 удовлетворяют условия.

Введем обозначения $J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},\ D=D_1\cup D_2\cup J,$

$$\partial D=\vec{\sigma}\cup\overrightarrow{AC}\cup\overrightarrow{BC},\quad 2\beta=\frac{m+2\beta_0}{m+2},$$

В области D для уравнения (1) исследуем задачи типа задачи Бицадзе-Самарский.

Задача BS**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{D})\cup C^1(D_1\cup D_2\cup J)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем единицы в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$;

2) $u(x,y)\in C^2(D_1)$ – является регульярным решением уравнения в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2 [34, с.229] ;

3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}; \tag{2}$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in\bar{J}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}u[\Theta_0(x)]+a(x)u(x,0)=b(x),\quad (x,0)\in J, \tag{4}$$

здесь $\varphi(x),\ a(x),\ b(x)-$ заданные функции, причем

$$\varphi(0)=b(0)=0,\quad a(0)\neq 0, \tag{5}$$

$$\varphi(x)=x(1-x)\varphi(x),\ \tilde{\varphi}(x)\in C[0,1], \qquad (6)$$

а функция $b(x)$ обращается в бесконечность порядка меньше $-\beta$ при $x\to 0$, а при $x\to 1$ ограничена.

$$\Theta_0(x)=\left(\frac{x}{2};-\left[\frac{2+m}{4}(x+1)\right]^{\frac{2}{2+m}}\right), \qquad (7)$$

здесь $\Theta_0(x)$ - точка пересечения характеристики AC с характеристикой, выходящей из точки $P(x,0)\in J$.

Теорема 3.1.(**Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе**). Если выполнены условия $-1<m<0,\quad -m-1\le\beta_0<-m/2$ и где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$ причем $-\frac{1}{2}<\beta<0$, то решение $u(x,y)$ задачи BS при $a(x)<0,\forall x\in\bar{J},\quad b(x)\equiv 0$ своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}_0$.

Теорема 3.2. Если выполнены условия $-1<m<0,\quad -m-1\le\beta_0<-m/2$ и где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$ причем $-\frac{1}{2}<\beta<0$, то в области D решение задачи BS иметь не более одного решения.

Теорема 3.3. Если выполнены условия $-1<m<0,\quad -m-1\le\beta_0<-m/2$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$ причем $-\frac{1}{2}<\beta<0$, (5), (6) и (7), то в области D решение задачи BS существует.

References:

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limitespour equation // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. 1935. 25A. № 10. P. 1-12.

2. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.41. no. 9. 2020. Pp. 1886–1897 .

3. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.2. 296 с.

4. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1. 296 с.

5. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики: Сб. науч. тр. Ленинград, 1970. С. 112-119.

6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.

7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.

8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 165 с.