



CONVERGENCE DOMAIN OF SERIES OF HOLOMORPHIC
FUNCTIONS AND PROBLEMS OF ANALYTIC
CONTINUATION

Gulhayo Safarboyeva

Tel: +998 91 774-17-03, e-mail: gulhayosafarboyeva@gmail.com,

ORCID ID: 0009-0008-4853-9001

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22056945>

ARTICLE INFO

Received: 18th August 2026

Accepted: 21st August 2026

Online: 22nd August 2026

KEYWORDS

Holomorphic function,
functional series,
convergence domain,
analytic continuation,
Hartogs phenomenon,
domain of holomorphy.

ABSTRACT

The paper examines the relationship between the convergence domain of a series of holomorphic functions and the domain of holomorphy of its sum - a question resolved differently in one- and several-variable complex analysis. Classical tools (Cauchy-Hadamard formula, Weierstrass and Abel theorems, Hadamard's gap criterion) are combined with the Hartogs extension theorem and plurisubharmonic function techniques. Using an original computed example, it is shown that the convergence domain of a multiple power series can never coincide with a Hartogs figure - it always automatically fills out to a complete, logarithmically convex Reinhardt domain, consistent with and verified against the Hartogs extension theorem. A fundamental qualitative difference between the one- and several-variable settings regarding natural boundaries is demonstrated.

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И
ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Gulhayo Safarboyeva

Tel: +998 91 774-17-03, e-mail: gulhayosafarboyeva@gmail.com,

ORCID ID: 0009-0008-4853-9001

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22056945>

ARTICLE INFO

Received: 18th August 2026

Accepted: 21st August 2026

Online: 22nd August 2026

KEYWORDS

Голоморфная функция,
функциональный ряд,
область сходимости,
аналитическое
продолжение, явление
Хартогса, область
голоморфности.

ABSTRACT

В работе рассматривается соотношение между областью сходимости ряда голоморфных функций и областью голоморфности его суммы - вопрос, качественно по-разному решаемый в одномерном и многомерном комплексном анализе. Использован классический аппарат (формула Коши-Адамара, теоремы Вейерштрасса и Абеля, признак Адамара о лакунарных рядах) в сочетании с теоремой Хартогса о продолжении и техникой плюрисубгармонических функций. На оригинальном вычислительном примере показано,



что область сходимости кратного степенного ряда никогда не может совпадать с фигурой Хартогса - она всегда автоматически «дозаполняется» до полного логарифмически выпуклого рейнхардтова множества, что согласуется с теоремой Хартогса и подтверждено прямым вычислением. Показано принципиальное различие между одномерным и многомерным случаями в вопросе естественной границы.

GOLOMORF FUNKSIYALAR QATORLARINING YAQINLASHISH SOHASI VA ANALITIK DAVOM ETTIRISH MASALALARI

Gulhayo Safarboyeva

Tel: +998 91 774-17-03, e-mail: gulhayosafarboyeva@gmail.com,

ORCID ID: 0009-0008-4853-9001

<https://doi.org/10.5281/zenodo.22056945>

ARTICLE INFO

Received: 18th August 2026

Accepted: 21st August 2026

Online: 22nd August 2026

KEYWORDS

Golomorf funksiya,
funksional qator,
yaqinlashish radiusi,
yaqinlashish sohasi, analitik
davom ettirish, tabiiy
chegara, Xartogs fenomeni,
plyurisubgarmonik funksiya,
golomorflik sohasi.

ABSTRACT

Golomorf funksiyalar qatorining yaqinlashish sohasi bilan uning yig'indisi golomorf holda mavjud bo'la oladigan sohani bir-biridan ajratish masalasi kompleks analizning hozirgacha to'liq yechimini topmagan yo'nalishlaridan hisoblanadi: bitta o'zgaruvchi holida bu ikki soha bir-biriga mos kelishi ham, keskin farqlanishi ham mumkin, biroq ko'p o'zgaruvchili fazoda ularning o'zaro nisbati sifat jihatidan farqli qonuniyatga bo'ysunadi. Maqolaning maqsadi - mazkur farqni klassik teoremlar negizida izchil bayon etish va uni ko'p o'lchamli holat uchun mustaqil qurilgan hisoblash misolida namoyish etishdan iborat. Tadqiqot metodikasi sifatida Koshi-Adamar formulasi, Veyershtrass va Abel teoremlari, Adamarning lakunar qatorlarga oid mezoni, shuningdek Xartogs kengaytirish teoremasi va plyurisubgarmonik funksiyalar apparatidan foydalanildi; original misolni qurishda majoranta bilan baholash va Koshi ko'paytmasi usuli qo'llanildi. Olingan natijalarga ko'ra, bir o'zgaruvchili holat uchun yaqinlashish doirasi bilan golomorflik sohasining mos kelmasligi Adamar lakunar qatori misolida ko'rsatildi; ko'p o'zgaruvchili holat uchun esa mualliflik hisoblash namunasi orqali darajali qatorning yaqinlashish sohasi hech qachon proper Xartogs figurasi bo'la olmasligi, balki har doim to'liq va logarifmik qavariq sohagacha «to'lib» ketishi bevosita hisoblash yo'li bilan tasdiqlandi. Xulosa qilib aytganda,



bir o'lchamli holatda mavjud bo'lgan tabiiy chegara hodisasi ko'p o'lchamli kompleks fazoda, xususan Xartogs tipidagi sohalarda, printsiplal jihatdan yo'qoladi; bu farq nazariy ahamiyatdan tashqari, qatorlar orqali approksimatsiya qilishning amaliy hisob-kitoblarida hamda ta'lim jarayonida hisobga olinishi lozim.

Golomorf funksiyalar qatori - kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tayanch tushunchalaridan biri bo'lib, uning yaqinlashish sohasini topish va qator yig'indisini shu soha tashqarisiga davom ettirish muammosi XIX asrning ikkinchi yarmidan boshlab O. Koshi, K. Veyershtrass va B. Riman kabi olimlarning ilmiy izlanish markazida turgan. Bu masala sof nazariy bo'lmay, balki amaliy ahamiyatga ham egadir: differensial tenglamalar, potentsiallar nazariyasi, gidrodinamika hamda kvant mexanikasidagi ko'pgina masalalarning yechimi aynan golomorf funksiya qanday sohada aniqlanganiga va u qanday tarzda kengroq sohaga tarqalishiga bog'liq bo'ladi.

Bitta kompleks o'zgaruvchi holatida nazariya deyarli to'liq shakllangan: darajali qatorning yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasi orqali topiladi, yaqinlashish doirasi ichida qator yig'indisi golomorf funksiya beradi, doira chegarasida esa turli xil hodisalar - yagona maxsus nuqtadan tortib butun chegara bo'ylab tarqalgan tabiiy to'siqqacha - kuzatilishi mumkin. Biroq ko'p o'lchamli kompleks fazoda (ya'ni $n \geq 2$ bo'lganda $\mathbb{C}^n$ da) manzara sezilarli darajada boshqacha: 1906 yilda F. Xartogs aniqlagan hodisaga ko'ra, ma'lum bir sinfga kiruvchi sohalarda berilgan golomorf funksiya

majburiy tarzda kengroq sohaga tarqaladi, ya'ni bunday sohalarda hech qachon biror funksiyaning haqiqiy golomorflik sohasi bo'la olmaydi.

O'zbekistonda kompleks analizning ko'p o'lchamli tarmog'i akademik Azimboy Sadullayev boshchiligidagi ilmiy maktab doirasida chuqur rivojlantirilgan. A. Aytuna va A. Sadullayevning parabolik ko'pxilliklarga bag'ishlangan tadqiqotlarida golomorf funksiyalarning global xossalari hamda ularni polinomlar bilan yaqinlashtirish masalasi plyuripotentsiallar nazariyasi vositalari - jumladan, ekstremal Grin va Sichak funksiyalari - asosida atroflicha yoritilgan [1]. Shu maktabga mansub S. Imomkulov va Y. Saidov o'z navbatida alohida-alohida garmonik funksiyalarni davom ettirish masalasini, xususan ularning tabiiy chegaralarga ega bo'lish yoki bo'lmaslik shartlarini tadqiq etishgan [2]. So'nggi yillarda respublika ilmiy davriy nashrlarida - "Ilm sarchashmalari" jurnalida [5] va Buxoro davlat universitetining "Aniq fanlar" ilmiy axborotnomasida [6] - Riman sirtlarida analitik davom ettirish hamda algebralik ko'pxilliklarda ekstremal funksiyalarga oid yangi natijalar muntazam chop etib borilmoqda.

Tadqiqotning maqsadi - golomorf funksiyalar qatorining yaqinlashish sohasi tuzilishini, uning golomorflik sohasi bilan aloqasini hamda



yaqinlashish chegarasidan tashqariga davom ettirish imkoniyati (yoki imkonsizligi) mezonlarini tahlil qilish, shuningdek bu farqni ko'p o'lchamli holat uchun original misolda ko'rsatishdan iborat. Bunga erishish uchun avval bir o'zgaruvchili nazariyaning tayanch natijalari (Koshi-Adamar, Abel, Veyershtass teoremlari) qisqacha isboti bilan bayon etiladi; tabiiy chegara hodisasi Adamar lakunar qatori misolida ko'rsatiladi; ko'p o'lchamli holat uchun Xartogs fenomenining mazmuni ochiladi; so'ngra Xartogs sohasi bilan bog'liq konkret darajali qator qurilib, uning haqiqiy yaqinlashish sohasi bevosita hisoblanadi.

Tadqiqot metodikasi. Ishda quyidagi klassik va zamonaviy metodlardan foydalanildi: darajali qatorning yaqinlashish radiusini topishda Koshi-Adamar formulasi va yuqori limit (limsup) tushunchasi; kompakt to'plamlarda tekis yaqinlashishni tekshirish uchun Veyershtass majoranta alomati hamda funksional qatorlar bo'yicha Veyershtassning golomorf funksiyalar qatoriga oid teoremasi; golomorf funksiyalar uchun Koshi integral formulasi va maksimum modul prinsipi; analitik davom ettirishning yo'l bo'yicha davom ettirish va monodromiya teoremasiga tayanuvchi klassik apparati; ko'p o'lchamli holat uchun plyurisubgarmonik funksiyalar [3; 4], Reyngard sohalari, Xartogs figurasi va golomorflik konverti tushunchalari, shuningdek A. Sadullayev va A. Aytuna tomonidan ishlab chiqilgan ekstremal funksiyalar metodi [1]; original misolni qurish va uning yaqinlashish sohasini aniq hisoblash uchun to'g'ridan-to'g'ri

baholash (majoranta qator qurish) va koeffitsientlarni maqsadli tanlash usuli.

Darajali qatorning yaqinlashish sohasi. Kompleks tekislikda markazi z_0 nuqtada bo'lgan quyidagi darajali qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

bunda $a_n \in \mathbb{C}$. Quyidagi klassik teorema o'rinli.

1-teorema (Koshi-Adamar). (1) qatorning yaqinlashish radiusi $R = 1 / (\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n})$ formula bilan aniqlanadi ($1/0 = +\infty$ va $1/\infty = 0$ deb qabul qilinadi). $|z - z_0| < R$ doirada qator absolyut yaqinlashadi va har qanday kompakt qism to'plamda tekis yaqinlashadi; $|z - z_0| > R$ sohada esa uzoqlashadi.

Isboti quyidagicha quriladi. $|z - z_0| < R$ bo'lsin; ρ sonini $|z - z_0| < \rho < R$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. limsup ta'rifidan, yetarlicha katta n larda $|a_n|^{1/n} < 1/\rho$, demak $|a_n(z - z_0)^n| < (|z - z_0|/\rho)^n$ bo'ladi. O'ng tarafdagi geometrik qator yaqinlashuvchi bo'lgani sababli, Veyershtass majoranta alomatiga asosan (1) qator $|z - z_0| \leq r < R$ doirada absolyut va tekis yaqinlashadi. Aksincha, $|z - z_0| > R$ bo'lganda cheksiz ko'p n uchun $|a_n(z - z_0)^n| > 1$ bo'lib, umumiy had nolga intilmaydi - demak qator uzoqlashadi. ■

Shunday qilib, $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ doira (1) qatorning tabiiy aniqlanish sohasi hisoblanadi va bu sohada qator yig'indisi golomorf funksiya beradi (buni quyidagi 2-teorema tasdiqlaydi). R sonining o'zi sof geometrik ma'noga ega bo'lib, u z_0 nuqtadan yig'indi funksiyasining eng yaqin maxsus nuqtasigacha bo'lgan masofani ifodalaydi.

Veyershtassning golomorf funksiyalar qatori haqidagi



teoremasi. $D \subset \mathbb{C}$ sohada golomorf funksiyalarning $\{f_n(z)\}$ ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

2-teorema (Veyershtrass). Agar $\sum_n f_n(z)$ qator D ning har qanday kompakt qism to'plamida tekis yaqinlashsa, u holda: (a) $f(z) = \sum_n f_n(z)$ funksiyasi D da golomorf bo'ladi; (b) $k = 1, 2, 3, \dots$ bo'lgan ixtiyoriy tabiiy son uchun $\sum_n f_n^{(k)}(z)$ qator ham D ning kompakt qismlarida tekis yaqinlashib, uning yig'indisi $f^{(k)}(z)$ ga teng bo'ladi - ya'ni qatorni had-baxadlab differensiallash mumkin.

(a) bandi Morera teoremasi va Koshi integral teoremasiga tayanadi: D dagi ixtiyoriy uchburchak kontur γ bo'yicha $\oint_{\gamma} f_n(z)dz = 0$ bo'lib, tekis yaqinlashish tufayli limit bilan integralni o'rin almashtirish mumkin, natijada $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$, ya'ni f golomorf. (b) bandi esa Koshining integral formulasidan - $f^{(k)}(z) = (k!/(2\pi i)) \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}} d\zeta$ - kelib chiqadi, bunda $|\zeta-z|$ pastdan chegaralangani sababli tekis yaqinlashish saqlanib qoladi. ■

Bu teorema (1)-qator uchun ayni muhim bo'lib chiqadi: R radiusli doira ichida qator 1-teorema isbotidagi kabi majoranta bilan baholanib, har bir kompakt qism to'plamda tekis yaqinlashgani uchun, yig'indi shu doirada golomorf bo'ladi hamda istalgan tartibli hosilaga ega bo'ladi.

Abel teoremasi. Yaqinlashish doirasi chegarasidagi xulq-atvorni quyidagi klassik natija tavsiflaydi.

3-teorema (Abel). Agar (1) qator $|z-z_0| = R$ chegaraning biror z_1 nuqtasida yaqinlashsa, u holda qator $[z_0, z_1]$ radial segmentda tekis yaqinlashadi va f funksiya shu segment bo'ylab z_1 nuqtada uzluksiz bo'ladi, ya'ni $t \rightarrow 1^-$ bo'lganda

$f(z_0 + t(z_1 - z_0))$ qiymati $\sum_n a_n(z_1 - z_0)^n$ yig'indisiga intiladi.

Demak, qatorning chegara nuqtasida yaqinlashishi funksiyaning shu nuqtagacha uzluksiz "davom etishini" ta'minlaydi, biroq bu - golomorf davom ettirish bilan bir xil hodisa emas. Chegaraning boshqa nuqtalarida funksiya butunlay boshqacha, hattoki chuqur maxsus xarakterga ega bo'lishi mumkinligini keyingi band ko'rsatadi.

Tabiiy chegara hodisasi. Yaqinlashish doirasi chegarasida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan eng og'ir holat - bu butun chegara aylanasi tabiiy chegaraga aylanishi, ya'ni funksiyani chegaraning birorta nuqtasi orqali ham tashqariga golomorf tarzda davom ettirib bo'lmasligidir. Bunday hodisaning klassik namunasi quyidagi qatordir:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots \quad (2)$$

4-teorema (Adamar, lakunar qatorlar haqida). (2) qatorning yaqinlashish radiusi $R = 1$ ga teng bo'lsa-da, birlik doira aylanasi $B(0,1)$ uning tabiiy chegarasi hisoblanadi: $f(z)$ funksiyasini aylananing hech bir nuqtasi orqali doiradan tashqariga golomorf tarzda davom ettirib bo'lmaydi.

Isbot g'oyasi shunday: f funksiyasi $f(z^2) = f(z) - z$ funksional tenglamani qanoatlantiradi. Agar f biror $\zeta_0 = \exp(2\pi i \cdot p/2^m)$ ko'rinishdagi nuqta atrofida golomorf davom etsa (bunday nuqtaning argumenti 2 ning darajasiga proporsional burchakka teng), funksional tenglama yordamida $z \rightarrow \zeta_0$ da $z^{2^k} \rightarrow 1$ bo'lgan cheksiz ko'p had mavjudligini va ularning yig'indisi cheksizlikka intilishini ko'rsatish mumkin - bu esa golomorflik farazi bilan ziddiyat tug'diradi. Bunday ζ_0 nuqtalar



birlik aylanada zich joylashgani sababli, uzluksizlik mulohazasiga ko'ra aylananing barcha nuqtalari maxsus nuqta ekanligi kelib chiqadi. ■

Demak, bir o'zgaruvchili holatda qatorning yaqinlashish sohasi (doira) va uning yig'indisi golomorf bo'lgan eng katta soha bir-biriga mos kelishi ham, mos kelmasligi ham mumkin - hattoki R dan tashqarida hech qanday davom ettirish bo'lmasligi ham istisno emas. Ana shu erkinlik bir o'zgaruvchili nazariyaning o'ziga xos belgisi bo'lib, quyida ko'rsatilganidek, ko'p o'zgaruvchili holatda u tubdan o'zgaradi.

Ko'p o'zgaruvchili holat: Xartogs fenomeni. $\mathbb{C}^n$ fazoda ($n \geq 2$) golomorf funksiyalar nazariyasi bir o'zgaruvchili nazariyadan sifat jihatidan ajralib turadi. Buning asosiy sababi F. Xartogs aniqlagan quyidagi hodisadir: chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) sohaning muayyan chekli o'lchamli qismini olib tashlash natijasida hosil bo'lgan qismsohada aniqlangan golomorf funksiya, ma'lum shartlar bajarilganda, majburiy ravishda butun D ga golomorf davom etadi. Bunga eng sodda misol - Xartogs figurasi.

$0 < r < R$ va $0 < \varepsilon < R$ sonlarini olib (ε - ikkinchi o'zgaruvchi bo'yicha «kichik» radius, R - «to'liq» radius), quyidagi ikki o'lchamli Xartogs figurasini kiritamiz:

$$H = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < R, |z_2| < \varepsilon\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : r < |z_1| < R, |z_2| < R\} \quad (3)$$

5-teorema (Xartogs kengaytirish teoremasi). H sohada aniqlangan har qanday golomorf funksiya to'liq bidiskka $\Delta = \{|z_1| < R, |z_2| < R\}$ ga yagona golomorf tarzda davom etadi. Demak, H hech qachon biror golomorf funksiyaning tabiiy golomorflik sohasi bo'la olmaydi.

Isboti Koshi integral formulasining ikki o'lchamli analogiga tayanadi. $r < |z_1| < R$ bo'lgan har bir z_1 uchun $f(z_1, \cdot)$ to'liq $|z_2| < R$ doirada golomorf bo'lgani sababli, u Teylor qatoriga yoyiladi: $f(z_1, z_2) = \sum_n c_n(z_1) z_2^n$, bunda $c_n(z_1) = (1/(2\pi i)) \oint f(z_1, z_2) z_2^{-(n-1)} dz_2$ (integral $|z_2| = \rho$ aylana bo'yicha olinadi), bu yerda ρ ixtiyoriy, faqat $\rho < \varepsilon$ shartni qanoatlantiradi. Ushbu integral ifoda $|z_1| \leq r$ bo'lgan nuqtalar uchun ham ma'noga ega, chunki bunday nuqtalarda ham $f(z_1, \cdot)$ hech bo'lmaganda $|z_2| < \varepsilon$ doirada golomorf; demak $c_n(z_1)$ butun $|z_1| < R$ doirada aniqlangan golomorf funksiya bo'lib chiqadi. Koshi tengsizligidan $r < |z_1| < R$ halqada $|c_n(z_1)| \leq M/\rho^n$ bahosi kelib chiqadi (M - f ning shu yerdagi chegarasi), maksimum modul prinsipiga ko'ra bu baho butun $|z_1| < R$ doirada ham saqlanadi. Shu bahoning o'zi $\sum c_n(z_1) z_2^n$ qatorining $|z_2| < \rho$ da tekis yaqinlashishini, uning esa $r < |z_1| < R$ halqadagi $|z_2| < R$ dagi qiymatlar bilan uyg'un ekanini ta'minlaydi - natijada f ning H dagi qiymatlariga mos keluvchi golomorf davom butun $\Delta = \{|z_1| < R, |z_2| < R\}$ bidiskda hosil bo'ladi. Bu klassik faktning to'liq va qat'iy isboti [1] da keltirilgan.

Original hisoblash: darajali qatorning to'liq Reyngard sohangacha «to'lib» ketishi. Ushbu bandda mualliflik hisoblash namunasi orqali quyidagi klassik, biroq ko'pincha e'tibordan chetda qoladigan fakt tekshiriladi: markazi koordinatalar boshida bo'lgan har qanday ko'p karrali darajali qatorning yaqinlashish sohasi har doim to'liq Reyngard soha bo'ladi - ya'ni agar (z_1, z_2) shu sohaga tegishli bo'lsa, $\{(w_1, w_2) : |w_1| \leq |z_1|, |w_2| \leq |z_2|\}$ yopiq polidiski ham to'liq shu sohada



yotadi - va bunday soha, bundan tashqari, logarifmik qavariqlik xossasiga ega bo'ladi.

Bu fakt muhim natijaga olib keladi: (3) dagi H Xartogs figurasi (demak, quyida quriladigan H' ham) hech qachon biror darajali qatorning aniq yaqinlashish sohasi bo'la olmaydi, chunki u to'liq emas. Buni tekshirib ko'ramiz. $R = 1$, $r = \varepsilon = 1/2$ qiymatlarni tanlab, (3) ga mos

$$H' = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1/2\} \cup \{(z_1, z_2) : 1/2 < |z_1| < 1, |z_2| < 1\} \quad (5)$$

Xartogs figurasini quramiz. $(0,9; 0,9)$ nuqta H' ga tegishli (chunki $1/2 < 0,9 < 1$ va $|0,9| < 1$ - ikkinchi shart bajariladi), biroq $(0,1; 0,9)$ nuqta - garchi $|0,1| \leq |0,9|$ va $|0,9| \leq |0,9|$ bo'lsa-da - H' ga tegishli emas (bu yerda na $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1/2$ sharti, na $1/2 < |z_1| < 1$ sharti bajariladi). Demak, H' to'liq Reyngard soha emas, shuning uchun u hech qanday darajali qatorning aniq yaqinlashish sohasi bo'la olmaydi.

Buni endi konkret qator misolida - hisoblash yo'li bilan - tasdiqlaymiz. H' figurasi bilan bog'liq quyidagi ikki karrali darajali qatorni tuzamiz:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} [z_2^n / (n! \cdot 2^n)] \cdot (1 / (1 - z_1)) \quad (4)$$

Hisoblash natijasi. (4) qatorning haqiqiy (maksimal) yaqinlashish sohasi H' emas, balki $C = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ to'liq Reyngard (silindrsimon) sohadir; bu soha H' ni ham, $\Delta = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ bidiskni ham qat'iy o'z ichiga oladi: $H' \subsetneq \Delta \subsetneq C$. Qatorning yig'indisi $F(z_1, z_2) = \exp(z_2/2)/(1-z_1)$ bo'lib, u butun C sohada golomorfdir.

Isboti: z_2 bo'yicha $\sum_n (z_2/2)^n/n!$ qatori - $\exp(z_2/2)$ funksiyaning Maklorren qatori - 1-teoremaga ko'ra butun $\mathbb{C}$ da (istalgan chekli z_2 da)

absolyut yaqinlashadi, chunki $\limsup(1/(n! \cdot 2^n))^{1/n} = 0$ bo'lgani uchun uning yaqinlashish radiusi cheksizdir. Ko'paytuvchi $1/(1-z_1)$ esa faqat $|z_1| < 1$ doirada golomorf ($z_1=1$ nuqtada qutbga ega) va u yerda $\sum z_1^k$ geometrik qatoriga yoyiladi. Shunday qilib, (4)-qator aynan $\{|z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\} = C$ to'plamda - ya'ni H' dan ham, Δ dan ham ancha kengroq sohada - yaqinlashadi; masalan, $z_1=0,1$ va $z_2=50$ kabi H' dan tashqarida (hattoki Δ dan ham tashqarida) yotgan nuqtada ham qator yaqinlashib, $F(0,1; 50) = \exp(25)/0,9$ qiymatini beradi. ■

Demak, agar F funksiyasi dastlab faqat H' sohada - masalan, boshqa vosita (chegaraviy shart yoki integral tasvir) orqali - golomorf funksiya sifatida berilgan bo'lganida, 5-teorema (Xartogs)ga ko'ra u albatta butun Δ bidiskka golomorf davom etishi shart edi. Bizning hisoblashimiz esa buning ustiga yanada aniqroq fakti ko'rsatadi: bunday «cheklangan», faqat H' da yaqinlashadigan darajali qator umuman mavjud bo'la olmaydi - chunki har qanday darajali qator o'z tabiatiga ko'ra avtomatik ravishda to'liq va logarifmik qavariq sohagacha (bizning holimizda - C silindrigacha) «to'lib» ketadi. Aynan mana shu xossa Xartogs teoremasi (5-teorema)ning nima uchun sof ko'p o'lchamli, bir o'zgaruvchili nazariyada printsiptial jihatdan uchramaydigan hodisa ekanligining ichki sababini ochib beradi.

Bu kuzatishni bir o'zgaruvchili 4-teorema (Adamar lakunar qatorlar) bilan qiyoslash quyidagini ko'rsatadi: $\mathbb{C}$ da tashqariga hech qanday davom ettirish mumkin bo'lmagan, tabiiy chegaraga ega qatorlar (masalan, (2)) mavjud bo'lsa-da,



ko'p o'zgaruvchili holatda darajali qatorning o'zi hech qachon Xartogs figurasiga o'xshash «kamchil» (to'liq bo'lmagan) sohada yaqinlasha olmaydi. Bu - Xartogs fenomeni bilan bevosita bog'liq, biroq undan farqli, qo'shimcha

strukturaviy xususiyat bo'lib, klassik 5-teoremani to'ldiruvchi kuzatish sifatida qaralishi mumkin.

Yuqoridagi natijalarni quyidagi jadvalda umumlashtiramiz:

Xossa	Bir o'zgaruvchili holat ($n = 1$)	Ko'p o'zgaruvchili holat ($n \geq 2$)
Yaqinlashish sohasi	Doira $B(z_0, R)$ (Koshi-Adamar)	Reyngard sohasi / polidisk, koeffitsientlar bo'yicha aniqlanadi
Tabiiy chegara mavjudmi?	Mumkin (masalan, Adamar lakunar qatorlar)	Xartogs tipidagi sohalarda mumkin emas - avtomatik davom etadi
Yaqinlashish sohasi = golomorflik sohasimi?	Umumiy holda yo'q, lekin bo'lishi ham mumkin	Xartogs figuralarida - har doim yo'q (qat'iy kichik)
Asosiy vosita	Koshi-Adamar, Veyershtass, Abel teoremlari	Xartogs teoremasi, plyurisubgarmonik funksiyalar, ekstremal funksiyalar [1]

1-jadval. Golomorf funksiyalar qatorining yaqinlashish sohasi va analitik davom ettirish xossalari bir va ko'p o'zgaruvchili holatlarda taqqoslanishi.

Natijalarning muhokamasi.

Keltirilgan natijalar golomorf funksiyalar qatorining yaqinlashish sohasi bilan uning yig'indisi golomorf bo'lgan soha o'rtasidagi bog'liqlik o'lchamga qattiq bog'liq tuzilishga ega ekanini tasdiqlaydi. Bitta o'zgaruvchi holatida (1-, 2-, 3-teoremlar) yaqinlashish sohasi doimo doira ko'rinishida bo'lib, uning chegarasidagi xulq-atvor Abel ma'nosidagi uzluksizlikdan (3-teorema) to butun chegara bo'ylab tarqalgan tabiiy maxsuslikkacha (4-teorema) turlicha bo'lishi mumkin. Bunday xilma-xillik R.

Nevanlinna va G. Poya kabi klassiklarning ishlarida chuqur o'rganilgan bo'lib, zamonaviy o'zbek matematiklari tomonidan ham davom ettirilmoqda.

Ko'p o'zgaruvchili holatda esa manzara mutlaqo boshqacha: 5-teorema (Xartogs) shuni ko'rsatadiki, geometrik tuzilishi Xartogs figurasiga o'xshash sohalarda aniqlangan har qanday golomorf funksiya kengroq, «tabiiy» golomorflik konvertiga majburiy tarzda davom etadi. Yuqorida keltirilgan hisoblash namunamiz esa bundan-da kuchliroq fakti - darajali qatorning o'zi hech qachon shunday «kamchil» sohada, ya'ni faqat Xartogs figurasida, yaqinlasha olmasligini, balki avtomatik ravishda



to'liq Reyngard sohangacha «to'lib» ketishini - bevosita hisoblash yo'li bilan tasdiqlaydi. Bir o'zgaruvchili nazariyada bunday hodisa tasavvur qilib bo'lmaydi, aynan shu jihat ko'p o'lchamli kompleks analizni mustaqil va boy nazariya sifatida ajratib turadi.

Olingan natijalar A. Aytuna va A. Sadullayevning parabolik ko'pxilliklardagi golomorf funksiyalarning global xossalari va polinomial approksimatsiyasiga oid natijalari bilan hamohang [1]: parabolik ko'pxilliklar nazariyasida ham xuddi shunga o'xshash tarzda, mahalliy berilgan golomorf ma'lumot qo'shimcha global cheklovlar ostida butun fazoga davom ettiriladi. S. Imomkulov va Y. Saidovning alohida-alohida garmonik funksiyalarni davom ettirishga bag'ishlangan natijalari [2] ham xuddi shu umumiy tamoyilni tasdiqlaydi: ko'p o'lchamli sohalarda funksiyaning "qisman" berilishi ko'pincha uning "to'liq", kengroq sohadagi mavjudligini taqozo etadi - bu prinsip bir o'lchamli nazariyada printsiptial jihatdan kuzatilmaydi. Bunday davom ettirishlarning nazariy asosini A. Sadullayevning plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning o'lchov-sig'im xossalari bag'ishlangan fundamental ishlari tashkil etadi [3; 4].

Amaliy jihatdan bu farqning ahamiyati bir necha yo'nalishda namoyon bo'ladi. Birinchidan, matematik fizikada ko'p o'zgaruvchili golomorf funksiyalar orqali beriladigan kattaliklarni faqat "kichik" sohada hisoblab, so'ngra ularning butun fazoga avtomatik davom etishiga tayanish mumkin. Ikkinchidan, qatorlar yordamida approksimatsiya qilishda

yaqinlashish sohasini haddan tashqari tor baholash amaliy hisoblarda ortiqcha ehtiyotkorlikka olib kelishi mumkinligini yodda tutish lozim. Uchinchidan, ta'lim jarayonida Xartogs fenomenini mavhum shaklda emas, balki yuqoridagi kabi bevosita hisoblanadigan misol orqali tushuntirish ancha samarali natija beradi.

Xulosa o'rnida shuni ta'kidlash lozimki, maqolada golomorf funksiyalar qatorining yaqinlashish sohasi va uning yig'indisini analitik davom ettirish masalasi klassik va zamonaviy natijalar negizida tizimli tahlil qilindi. Koshi-Adamar formulasi, Veyersstrass va Abel teoremlari yordamida bir o'zgaruvchili holatning to'liq manzarasi qayta tiklandi, Adamar lakunar qatori misolida tabiiy chegara hodisasi ko'rsatildi. Ko'p o'lchamli kompleks fazoda esa Xartogs fenomeni tufayli vaziyat sifat jihatidan o'zgarishi asoslandi. Ishning asosiy ilmiy yangiligi - (4) ko'rinishdagi original ikki karrali darajali qator vositasida, darajali qatorning yaqinlashish sohasi hech qachon proper Xartogs figurasi (H') bo'la olmasligi, balki avtomatik ravishda to'liq va logarifmik qavariq sohangacha (C silindrigacha) «to'lib» ketishining bevosita hisoblash yo'li bilan tasdiqlanishidir. Kelgusi tadqiqotlar uchun quyidagi yo'nalishlar istiqbolli hisoblanadi: ayriladigan bo'lmagan qatorlar uchun Xartogs tipidagi davom ettirish misollarini A. Sadullayev maktabining ekstremal funksiyalar metodlari asosida qurish [1]; parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan qatorlarning yaqinlashish sohasini approksimatsion baholar bilan bog'lash; alohida-alohida golomorf va garmonik funksiyalar



nazariyasi natijalarini [2] qatorlar tiliga
o'tkazish.

References:

1. Aytuna A., Sadullaev A. Parabolic manifolds and polynomial approximation of holomorphic functions // O'zbekiston FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, dissertatsiya avtoreferati. - Toshkent-Urganch, 2023.
2. Имомкулов С.А., Саидов Ё.Р. О продолжении сепаратно-гармонических функций // Uzbek Mathematical Journal. - Ташкент, 2008. - №4. - С. 89-104.
3. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. направления. - М.: ВИНТИ, 1985. - Т. 8. - С. 65-111.
4. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические меры и ёмкости на комплексных многообразиях // Успехи математических наук. - 1981. - Т. 36, вып. 4. - С. 53-105.
5. Ilm sarchashmalari. Ilmiy-uslubiy jurnal. - Urganch, 2025. - №5(2).
6. Buxoro davlat universiteti "Aniq fanlar" ilmiy axborotnomasi. - Buxoro, 2025. - №11(1). - ISSN 2181-6875.