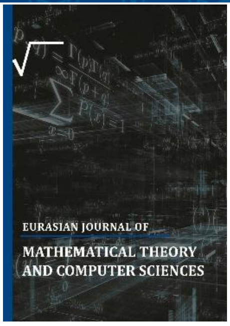
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.206 www.in-academy.uz/index.php/ejmtcs



LINEAR INDEPENDENT AND LINEAR DEPENDENT VECTOR FAMILIES. THEORETICAL FOUNDATIONS AND PRACTICAL APPLICATIONS

Koshmuratova G. M.
2nd-grade student, Karakalpak State University named after Berdakh
https://doi.org/10.5281/zenodo.19105866

ARTICLE INFO
Received: 12th March 2026
Accepted: 18th March 2026
Online: 19th March 2026

KEYWORDS
Linear independence, linear dependence, vector space, basis, linear combination, rank of matrices.

ABSTRACT

The article analyzes the theoretical foundations of families of linearly independent and linearly dependent vectors, which are essential concepts in systems of linear algebra. The conditions under which a system of vectors forms a basis, their relationship with the spatial dimension, and practical applications (specifically, dimensionality reduction in big data analysis) are highlighted.

CHIZIQLI ERKIN VA CHIZIQLI BOG‘LIQ VEKTORLAR OILALARI. NAZARIY ASOSLAR VA AMALIYOTDA QO‘LLANILISHI

Koshmuratova G. M.
2-kurs talabasi, Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti
https://doi.org/10.5281/zenodo.19105866

ARTICLE INFO
Received: 12th March 2026
Accepted: 18th March 2026
Online: 19th March 2026

KEYWORDS
Chiziqli erkinlik, chiziqli bog‘liqlik, vektorlar fazosi, bazis, chiziqli kombinatsiya, matritsalar rangi.

ABSTRACT

Maqolada chiziqli algebra tizimlarining muhim tushunchalari bo‘lgan chiziqli erkin va chiziqli bog‘liq vektorlar oilalarining nazariy asoslari tahlil qilinadi. Vektorlar sistemasining bazis tashkil etish shartlari, ularning fazoviy o‘lchami (dimension) bilan bog‘liqligi va amaliy tatbiqlari (xususan, katta ma’lumotlar tahlilida o‘lchovlarni qisqartirish) yoritiladi.

Zamonaviy hisoblash matematikasida va ma’lumotlar fanida (Data Science) vektorlar bilan ishlash asosiy jarayon hisoblanadi. Vektorlar oilasining chiziqli xususiyatlarini aniqlash algoritmlarini tizimlashtirish.

V vektorlar fazosida $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorlar uchun quyidagi ifoda $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$ ularning chiziqli kombinatsiyasi hisoblanadi.

Chiziqli bog‘liq sistema: Agar kamida bittasi noldan farqli bo‘lgan c_i skalyarlar uchun $\sum c_i v_i = 0$ tenglik bajarilsa, sistema chiziqli bog‘liq deyiladi.

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.206 www.in-academy.uz/index.php/ejmtcs

Chiziqli erkin sistema: Agar $\sum c_i v_i = 0$ tenglik faqat barcha $c_i = 0$ boʻlgandagina bajarilsa, sistema chiziqli erkin deyiladi.

Chiziqli algebra vektorni ma'lumotlarning eng kichik birligi deb qaraydi. V vektorlar fazosida n ta vektor sistemasi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ berilgan boʻlsin.Chiziqli bogʻliqlik va erkinlikni aniqlash uchun quyidagi vektor tenglamasidan foydalanamiz:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$$

bu yerda c_i — skalyar koeffitsiyentlar.

Teorema 1: Chiziqli bogʻliqlikning zaruriy va yetarli sharti. Agar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorlar tizimida kamida bitta vektor boshqalarining chiziqli kombinatsiyasi koʻrinishida ifodalansa, u holda bu sistema chiziqli bogʻliq boʻladi.

Isboti: Faraz qilaylik, v_k vektor qolgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi boʻlsin ($1 \le k \le n$):

$$v_k = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{k-1}v_{k-1} + a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_nv_n$$

Ushbu tenglamani bir tomonga oʻtkazamiz:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{k-1}v_{k-1} - 1 \cdot v_k + a_{k+1}v_{k+1} + \ldots + a_nv_n = 0$$

Bu yerda v_k oldidagi koeffitsiyent -1 ga teng, ya'ni u noldan farqli. Chiziqli bogʻliqlik ta'rifiga koʻra, agar biror koeffitsiyent noldan farqli boʻlsa, sistema chiziqli bogʻliqdir.

Teorema 2: Nol vektor va chiziqli bogʻliqlik. Agar $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorlar oilasida kamida bitta nol vektor ($v_i = \vec{0}$) mavjud boʻlsa, u holda bu sistema chiziqli bogʻliqdir.

Isboti: Chiziqli kombinatsiya tenglamasini qaraymiz:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_iv_i + \ldots + c_nv_n = 0$$

Faraz qilaylik, $v_i = \vec{0}$. U holda tenglamadagi c_i koeffitsiyentini 1 ga teng deb olamiz, qolgan barcha $c_j = 0$ (bu yerda $j \neq i$). Natija quyidagicha boʻladi:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{0} + \ldots + 0 \cdot v_n = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Bu tenglik bajarildi, lekin $c_i = 1 \neq 0$. Demak, sistema chiziqli bogʻliq.

Teorema 3: Bazis haqida (Oʻlchamlik). Agar V vektorlar fazosida n ta vektordan iborat $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazis mavjud boʻlsa, u holda n dan ortiq har qanday vektorlar oilasi chiziqli bogʻliq boʻladi.

Isboti: Har qanday vektor x bazis vektorlar orqali yagona usulda ifodalanadi: $x = \sum \alpha_i e_i$. Agar bizda m ta vektor boʻlib, $m > n$ boʻlsa, biz ularni $n \times m$ oʻlchamli matritsa sifatida yozib chiqamiz. Gauss-Jordan eliminatsiya usuliga koʻra, bu matritsaning rangi n dan oshib keta olmaydi. Ustunlarning soni (m) matritsa rangidan (n) katta boʻlganligi sababli, tizimda kamida $m-n$ ta "erkin oʻzgaruvchi" (free variables) paydo boʻladi. Bu esa tenglamalar sistemasining trivial bo‘lmagan yechimi mavjudligini bildiradi

Chiziqli erkinlik: Agar yuqoridagi tenglik faqat $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sistemasi **chiziqli erkin** deyiladi. Bu shuni anglatadiki, vektorlarning hech biri boshqalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanmaydi.

Chiziqli bog‘liqlik: Agar kamida bitta $c_i \neq 0$ mavjud bo‘lsa, sistema **chiziqli bog‘liq** hisoblanadi. Geometrik nuqtai nazardan, bu vektorlar bir tekislikda yoki to‘g‘ri chiziqda yotganini (redundancy) bildiradi.

Bazis teoremasi: Agar n o‘lchovli fazoda n ta vektor chiziqli erkin bo‘lsa, u holda bu vektorlar to‘plami fazoning **bazisi** hisoblanadi.

Bog‘liqlik prinsipi: Agar sistema tarkibida nol vektor mavjud bo‘lsa yoki vektorlar soni fazo o‘lchamidan katta bo‘lsa ($m > n$), u holda sistema avtomatik ravishda chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Nazariy bilimlarning amaliyotda qo‘llanilishi tizim samaradorligini oshirishga qaratilgan:

1. Big Data va O‘lchovlarni qisqartirish (Dimensionality Reduction)

Katta hajmli ma’lumotlar to‘plamida ko‘plab ustunlar (features) bir-biriga chiziqli bog‘liq bo‘lishi mumkin. Masalan, agar bir ustun boshqasining ikki barobari bo‘lsa, u hech qanday yangi axborot bermaydi. **PCA (Principal Component Analysis)** algoritmi aynan vektorlar sistemasidagi chiziqli bog‘liqlikni aniqlab, ortiqcha ma’lumotlarni olib tashlash va faqat eng muhim "komponentlarni" qoldirish orqali tizimni optimallashtiradi.

2. Telekommunikatsiya va Signalga ishlov berish

Signalni raqamlashtirishda (masalan, Furye almashtirishlari) signallar bazis funksiyalar yig‘indisi sifatida ifodalanadi. Chiziqli erkin vektorlar (ortogonal bazis) orqali signalni siqish (JPEG, MP3 formatlari) amalga oshiriladi. Agar vektorlar bog‘liq bo‘lsa, signalni qayta tiklashda xatolik yuzaga keladi.

3. Klasterli tizimlarda parallel hisoblashlar

Parallel hisoblash muhitida katta matritsalar bilan ishlashda matritsa rangini (rank) aniqlash muhim. Matritsa rangi qancha kichik bo‘lsa (ya'ni, vektorlar qanchalik chiziqli bog‘liq bo‘lsa), hisoblash jarayonini shunchalik ko‘p qismlarga bo‘lib, turli klaster tugunlariga taqsimlash va hisoblash tezligini oshirish mumkin.

Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, vektorlarning chiziqli erkinligi tizimning optimal ishlashini ta’minlaydi. Chiziqli bog‘liqlik esa tizimda ortiqchalik borligini anglatadi, bu esa algoritmlar optimallashtirilganda hisoblash resurslarini tejash imkonini beradi.Vektorlar oilasining chiziqli erkinligi va bog‘liqligini o‘rganish nazariy matematikadan tashqariga chiqib, bugungi kundagi **Big Data** va **AI (Sun’iy intellekt)** algoritmlarining asosi hisoblanadi. Ma’lumotlar bazasini optimallashtirish, xatolarni aniqlash va hisoblash resurslarini tejash bevosita vektorlarning chiziqli xususiyatlarini tahlil qilishga bog‘liq.

References:

1. Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications.* Brooks Cole.
2. Gelfand, I. M. *Lectures on Linear Algebra.*
3. T. S. Shoimov. *Chiziqli algebra va analitik geometriya.* Toshkent, 2020.
4. Axler, S. *Linear Algebra Done Right.* Springer.
5. Strang, G. (2016). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press.
6. Lay, D. C. (2012). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson.
7. Utepbergenova, A. K. (2025). "Parallel processing algorithms in remote sensing data analysis". *Journal of Innovative Technologies*.
8. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2013). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press.