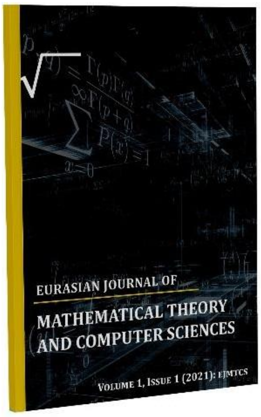
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
www.in-academy.uz



FUNDAMENTAL GROUP. ONE-LINK SPACES

Samatboyeva Maftuna Tulqinjon qizi

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Faculty of Mathematics

https://doi.org/10.5281/zenodo.5514944

ARTICLE INFO

Received: 05th September 2021
Accepted: 10th September 2021
Online: 15th September 2021

KEY WORDS

one-link, fundamental group, path homotopic, multiplication

ABSTRACT

In this article, you will learn the concepts of homotopy, path, and loop in algebraic topology, as well as the fundamental group of space, interconnected spaces, and their properties.

FUNDAMENTAL GRUPPA. BIR BOG‘LAMLI FAZOLAR

Samatboyeva Maftuna Tulqinjon qizi

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, matematika fakulteti

MAQOLA TARIXI

Qabul qilindi: 05-sentabr 2021
Ma’qullandi: 10-sentabr 2021
Chop etildi: 15- sentabr 2021

KALIT SO’ZLAR

bir bog‘lamlilik, fundamental gruppa, yo‘l gomotopik,ko‘paytmasi

ANNOTATSIYA

Bu maqolada siz algebraik topologiyadagi gomotopiya, yo‘l, sirtmoq tushunchalari bilan tanishasiz hamda fazoning fundamental gruppasi, bir bog‘lamli fazolar va ularning xossalarini o‘rganasiz.

Topologiyaning asosiy muammosi bu ikkita berilgan topologik fazolar bir-biriga gomeomorf bo‘ladimi yoki yo‘q, shuni o‘rganishdir. Umumiy holda bu savolga javob beradigan metod yo‘q. Lekin ba’zi bir texnikalar borki ikkita fazo gomeomorf emasligini aniq ko‘rsatib beradi, ya’ni birinchi fazoda o‘rinli bo‘lgan xossa ikkinchisida o‘rinli bo‘lmaydi. Misol uchun $[0,1]$ yopiq interval $(0,1)$ ochiq intervalga gomeomorf emas, sababi birinchi fazo kompakt ikinchisi esa yo‘q. Haqiqiy o‘q $\mathbb{R}$ ham $\mathbb{R}^2$ tekislikka gomeomorf emas, sababi $\mathbb{R}^2$ dan bitta nuqtasini olib tashlasak bog‘lanishli fazoligicha qoladi, lekin $\mathbb{R}$ dan bitta nuqtasini olib tashlasak bog‘lanishsiz bo‘lib qoladi. Ammo biz shu paytgacha o‘rgangan xossalar yetarli bo‘lmaydi. Masalan oddiy $\mathbb{R}^2$ tekislik va 3-o‘lchamli $\mathbb{R}^3$ fazo gomeomorf emasligini qanday ko‘rsatamiz, ya’ni biz bilgan kompaktlik, bog‘lanishlilik, lokal bog‘lanishlilik, metrikaga ega bo‘lishlik bu topologik xossalar ikkala fazoda ham bir xil. Demak biz fazolarning yangi xossalarini o‘rganishimiz kerak. Shunday xossalardan eng ajoyibi bu **bir bog‘lamlilik** (**simple connectedness**) dir. Lekin bu tushunchani kiritish uchun dastlab **fundamental gruppa (fundamental group)** tushunchasini kiritishimiz kerak.

Yangi terminlarni kiritishdan oldin eskilarini eslab olaylik:

$X-$ topologik fazo berilgan bo‘lsin. Bu fazoda x_0 dan x_1 ga boruvchi **yo‘l (path)** deb $f\colon[0,1]\to X$ uzluksiz funksiyaga aytiladi, bu yerda $f(0)=x_0, f(1)=x_1$ bo‘lishi kerak.

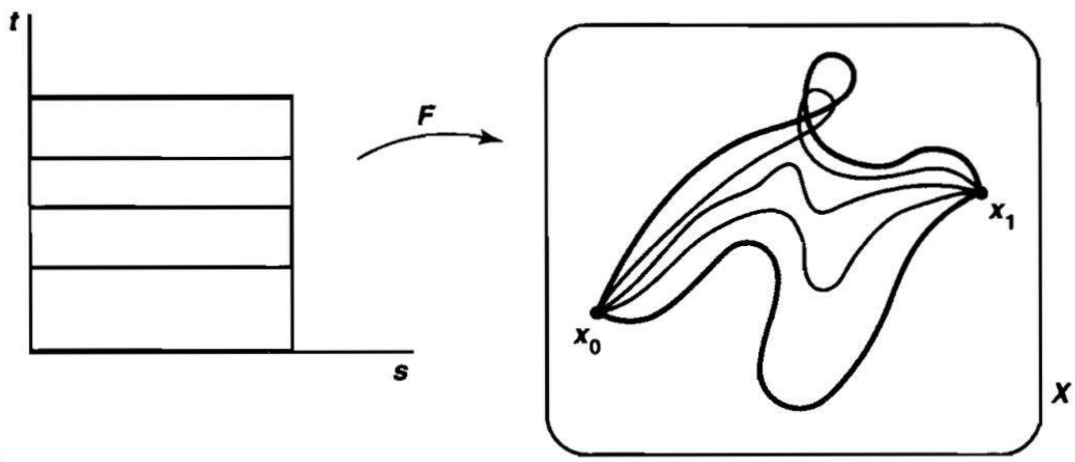
Qulaylik uchun $I=[0,1]$ deb belgilab olaylik.

Ta’rif: $f, g-$lar ikkalasining ham boshlanish nuqtasi x_0 da, tugash nuqtasi x_1 da bo‘lgan X dagi **yo‘l (path)** lar bo‘lsin. Agar shunday $F\colon I\times I\to X$ **uzluksiz** funksiya mavjud bo‘lsa

$$F(s,0)=f(s) \quad \text{va} \quad F(s,1)=g(s)$$

$$F(0,t)=x_0 \quad \text{va} \quad F(1,t)=x_1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi, barcha $s\in I$ va $t\in I$ lar uchun. U holda $f, g-$ **yo‘l gomotopik (path homotopic)** deyiladi. Bu $\boldsymbol{F}-$funksiya esa f va g lar o‘rtasidagi **yo‘l gomotopiya (path homotopy)** deyiladi.



f, g −yo‘l gomotopik bo‘lsa $\boldsymbol{f \simeq_p g}$ kabi belgilanadi.

Lemma: $\simeq_{\boldsymbol{p}}$−ekvivalentlik munosabati bo‘ladi.

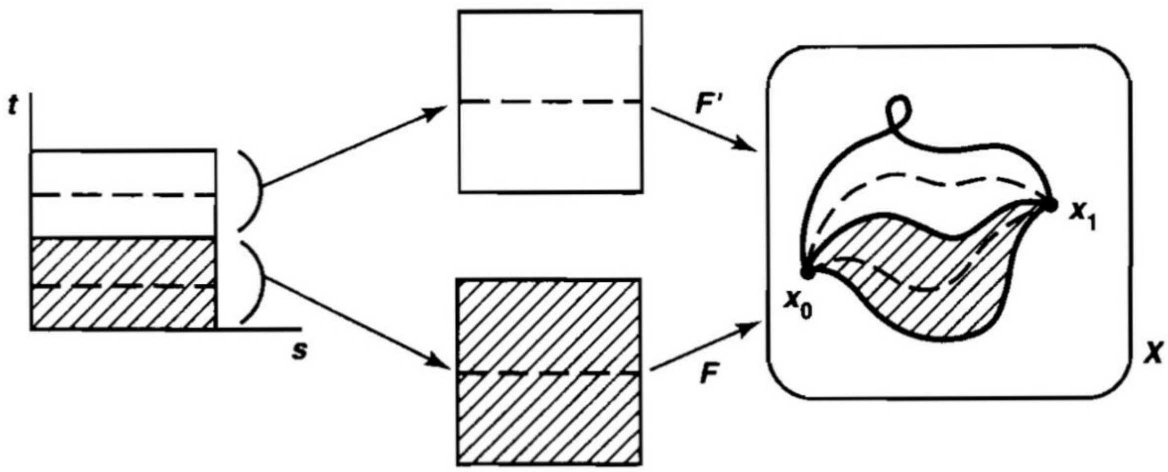
Aniqki ixtiyoriy $f \simeq_p f$, chunki $F(x,t) = f(x)$ bizga kerakli yo‘l gomotopiya bo‘ladi.

Agar $f \simeq_p g$ bo‘lsa $g \simeq_p f$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. $F - f$ va g o‘rtasidagi yo‘l gomotopiya bo‘lsin, u holda $G(x,t) = F(x, 1-t)$ deb olsak, $G - g$ va f o‘rtasidagi yo‘l gomotopiya bo‘ladi.

Endi $f \simeq_p g, g \simeq_p h$ bo‘lsa $f \simeq_p h$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. $F, G -$ mos ravishda f, g va g, h lar o‘rtasidagi yo‘l gomotopiyalar bo‘lsin.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(x, 2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Aynan shu H −bizga kerakli g va f o‘rtasidagi yo‘l gomotopiya bo‘ladi. F, G −uzluksiz va $F(x,1) = G(x,0) = g(x) = H(x, \frac{1}{2})$ bo‘lgani uchun ham H −ham uzluksiz bo‘ladi.



Demak, X fazodagi yo‘llar ekvivalentlik sinflariga ajraladi. $[f]$ −deb f ning ekvivalentlik sinfini belgilaymiz.

Ta’rif: $f - X$ fazoda x_0 dan x_1 ga boruvchi yo‘l bo‘lsin, $g - x_1$ dan x_2 ga yo‘l bo‘lsin. U holda ularning **ko‘paytmasi (product)** $-f * g$ ko‘rinishdagi h yo‘lni quyidagicha aniqlaymiz:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s-1), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
www.in-academy.uz

$h -$ ham X da yo‘l bo‘ladi va x_0 dan x_2 ga boradi. $h -$ ning birinchi yarim qismi f dan iborat, ikkinchi yarim qismi g dan iborat deb qarashimiz mumkin.

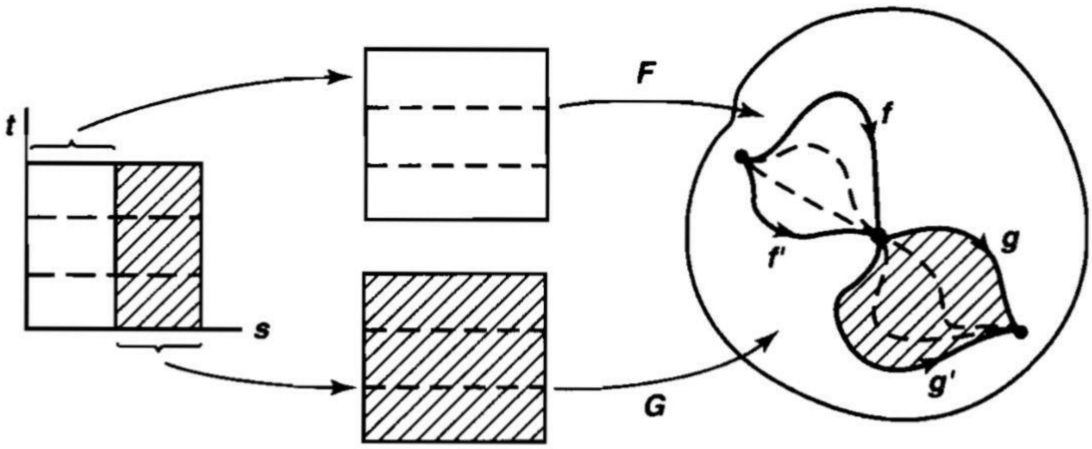
Bu ko‘paytirish orqali sinflarni ko‘paytirish amalini quyidagicha kiritamiz:

$$[f] * [g] = [f * g]$$

ya’ni ikkita yo‘llar sinfining ko‘paytmasi deb bu yollar ko‘paytmasining sinfiga aytamiz. Bu ko‘paytirish to‘g‘ri aniqlangan. $[f] = [f']$, $[g] = [g']$ ya’ni $f \simeq_p f'$, $g \simeq_p g'$ bo‘lsin, u holda $[f * g] = [f' * g']$ ekanligini ko‘rsatish kerak. Buning uchun $f * g$ va $f' * g'$ o‘rtasida yo‘l gomotopiya qurishimiz kerak. $F, G -$ mos ravishda f, f' va g, g' lar o‘rtasidagi yo‘l gomotopiyalar bo‘lsin.

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(2s-1,t), & s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ bo‘lgani uchun ham $H -$to‘g‘ri aniqlangan va uzluksiz. Aynan shu $H - f * g$ va $f' * g'$ lar o‘rtasidagi yo‘l gomotopiya bo‘ladi.



Teorema: * amal quyidagi xossalarga ega:

(1) (Assotsiativlik) $[f] * ([g] * [h])$ aniqlangan bo‘lsa $([f] * [g]) * [h]$ ham aniqlangan bo‘ladi va ular teng bo‘ladi.

(2) (O‘ng va chap birlik elementlar) $x \in X$ uchun, e_x deb $e_x : I \to X$, barcha nuqtalarni x ga o‘tkazuvchi const funksiyani belgilaylik. Agar $f - X$ fazoda x_0 dan x_1 ga yo‘l bo‘lsa, u holda

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \qquad \text{va} \qquad [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

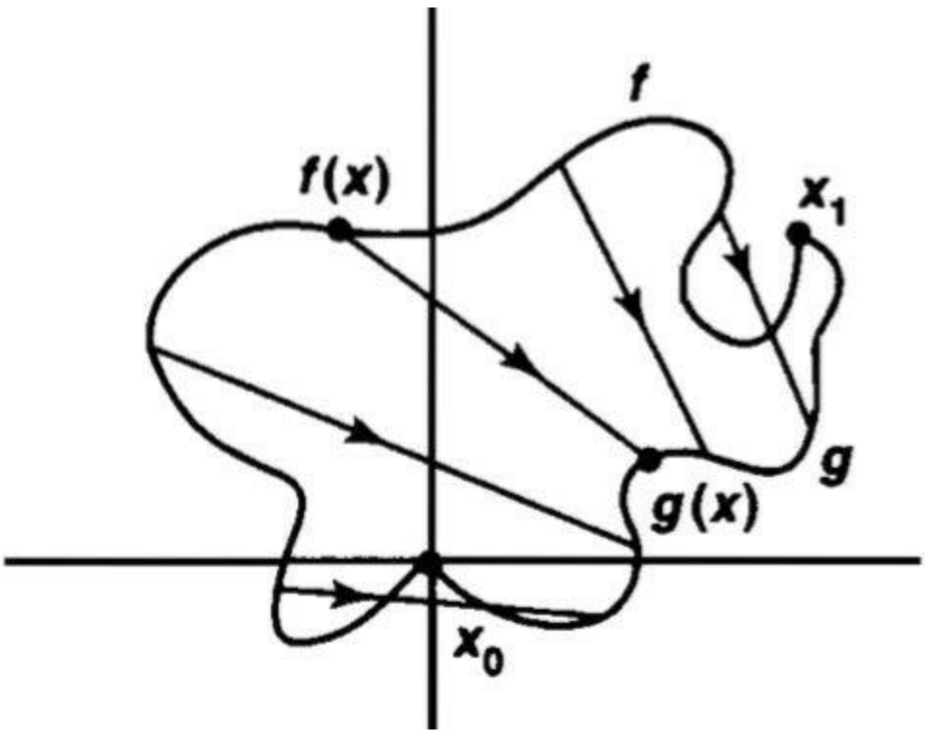
(3) (Teskarisi) $f - X$ fazoda x_0 dan x_1 ga yo‘l bo‘lsin. $\bar{f}$ deb $\bar{f}(s) = f(1-s)$ kabi aniqlangan yo‘lni belgilaylik. Bu yo‘l f ning teskarisi deyiladi va quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \qquad \text{va} \qquad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

Aynan mana shu uchta xossadan foydalangan holda fundamental gruppa tushunchasini kiritamiz. Sezib turganingizdek gruppaning elementlari sinflardan iborat bo‘ladi. Lekin bitta muammo bor, ya’ni $[f] * [g]$ ko‘paytma har qanday f, g –yo‘llar uchun aniqlanmagan, faqatgina $f(1) = g(0)$ bo‘lganlari uchungina aniqlangan. Bu muammoni hal qilish uchun biz boshi va oxiri bitta nuqtada bo‘lgan **sirtmoq (loop)** tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif: $X-$ topologik fazo, x_0 –undagi nuqta bo‘lsin. x_0 da boshlanib x_0 da tugaydigan har qanday yo‘l - asosi x_0 da bo‘lgan **sirtmoq (loop) deyiladi.** x_0 asosli barcha sirtmoqlarning yo‘l gomotopiya sinflar to‘plami, * amal bilan birgalikda, X ning **fundamental gruppasi** deyiladi (x_0 asosga nisbatan). Quyidagicha belgilanadi: $\pi_1(X, x_0)$.

Misol: $\mathbb{R}^n -$ n o‘lchamli Yevklid fazosi. Uning fundamental gruppasi trivial (yagona birlik elementdan iborat) gruppa bo‘ladi. Chunki, $F(s,t) = (1-t)f(s) + tg(s)$ ko‘rinishdagi yo‘l gomotopiya **(straight line homotopy)** ixtiyoriy f, g lar o‘rtasidagi gomotopiya bo‘ladi. Demak, ixtiyoriy asosi x_0 dagi f sirtmoq - const sirtmoqqa yo‘l gomotopik bo‘ladi. Bu degani ekvivalentlik sinfi yagona $[e_{x_0}]$ dan iborat. Umumiy holda, agar $X - \mathbb{R}^n$ ning ixtiyoriy **qavariq** to‘plami bo‘lsa ham uning fundamental gruppasi trivial bo‘ladi. Xususan, $B^n = \{x |\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + \dots + {x_n}^2 \le 1\} - \mathbb{R}^n$ dagi birlik sharniki ham.



EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
www.in-academy.uz

Ta'rif: $\alpha - X$ da x_0 dan x_1 ga boruvchi yo'l bo'lsin.

$\hat{\alpha}: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$

$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]$ ko'rinishda akslantirish aniqlaylik.

Bu akslantirish to'g'ri aniqlangan, chunki, $f -$ asosi x_0 dagi sirtmoq bo'lsa,

$\bar{\alpha} * (f * \alpha) -$ asosi x_1 dagi sirtmoq bo'ladi.

Teorema: $\hat{\alpha} -$ gruppalarning isomorfizmi bo'ladi.

Demak, fazodagi x_0 va x_1 nuqtalar yo'l bilan tutashtirilgan bo'lsa ularning fundamental gruppalari isomorf bo'lar ekan.

Chiziqli bog'lanishli fazo ta'rifini eslaylik: Fazodagi ixtiyoriy ikkita nuqta yo'l bilan tutashtirilgan bo'lsa **chiziqli bog'lanishli (path connected)** deyilar edi.

Chiziqli bog'lanishli fazoda barcha nuqtalar yo'llar bilan tutashgani uchun barcha nuqtalarning fundamental gruppalari bir-biriga isomorf bo'ladi. Shuning uchun ba'zida bunday fazolarda asosini yozmasdan $\pi_1(X)$ ko'rinishda yozib ketiladi.

Ta'rif: Agar $X -$ chiziqli bog'lanishli va $\pi_1(X) = \{e\}$ bo'lsa, bu fazo **bir bog'lamli (simple connected)** deyiladi.

$\mathbb{R}^n, B^n$ lar bir bog'lamli fazolarga misol bo'la oladi.

Ta'rif: $h: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uzluksiz akslantirish bo'lsin (X fazoni Y fazoga o'tkazuvchi, bunda x_0 nuqtasi y_0 ga o'tadi).

$h_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

ko'rinishda akslantirish aniqlaylik. Bu $h_* -$ ***h* dan hosil qilingan gomomorfizm** deyiladi, x_0 asosga nisbatan.

Teorema: $h: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ bu X va Y fazolarning gomeomorfizmi bo'lsin. U holda $h_* - \pi_1(X, x_0)$ va $\pi_1(Y, y_0)$ gruppalarning isomorfizmi bo'ladi.

Xulosa: Berilgan ikkita topologik fazolarni gomeomorflikka tekshirishda ularning fundamental gruppalarini isomorflikka tekshirish kerak ekan.

References:

1. Nishonqulov, S. F. O. G. L., & Solidjonov, D. Z. O. G. L. (2021). Ta'lim biznesida raqamli innovatsion texnologiyalar. Science and Education, 2(6), 233-238.

2. Inomxojayev, A. A. O., Yoldashev, A. E. O., & Nishonqulov, S. F. O. (2021). ZARARLI OBYEKTNING KOMPYUTERGA TA'SIRI UCHUN MATEMATIK MODEL IMMUNITET TIZIMI. Scientific progress, 2(2), 1662-1667.

3. Sulaymonov, J. B. O. G. L., Yuldashev, A. E. O. G. L., & Nishonqulov, S. F. O. G. L. (2021). Gidrologik modellashtirish bilan Geografik axborot tizimlari (GIS) integratsiya. Science and Education, 2(6), 239-246.

4. Sulaymonov, J. B. O., Nishonqulov, S. F. O., & Gofurov, M. R. (2021). GEOGRAFIK AXBOROT TIZIMLARI VA AMALIY IQTISODIYOT: POTENTSIAL ARIZALAR VA HISSALARNI DASTLABKI MUHOKAMALARI. Scientific progress, 2(2), 1371-1377.