



SOME METHODS OF FORMING A RING OF POLYNOMIALS

M. Asqarov

Associate Professor of the Department of Mathematics Teaching
Methodology of Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

G.Allambergenova

Assistant teacher of the Department of Mathematics Teaching
Methodology of Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz

J. M. Asqarova

Teacher of Nukus Academic Lyceum near Karakalpak State University

<https://doi.org/10.5281/zenodo.13284483>

ARTICLE INFO

Received: 02nd August 2024

Accepted: 08th August 2024

Online: 09th August 2024

KEYWORDS

*Polynomials, sequences,
vectors, the ring, multi-
membered degrees.*

ABSTRACT

The article considers the vector model of a ring of polynomials. This ring considers some properties of polynomials. All statements are provided with detailed examples with solutions

KÓP AGZALILAR SAQIYNASIN DÚZIWDIŇ BAZIBIR USILLARI

M. Asqarov

Ajiniyaz atındağı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası docenti

G.Allambergenova

Ajiniyaz atındağı NMPI matematika oqıtıw metodikası kafedrası assistent oqıtıwshısı

J. M. Asqarova

QMU janındağı Nókis akademiyalıq licey oqıtıwshısı

<https://doi.org/10.5281/zenodo.13284483>

ARTICLE INFO

Received: 02nd August 2024

Accepted: 08th August 2024

Online: 09th August 2024

KEYWORDS

*Ko'phadlar, ketma-ketlik,
vektorlar, halqa, darajali
ko'phadlar.*

ABSTRACT

Ushbu maqolada ko'phadlar halqasining vector modeli keltirilgan. Bu halqada ko'phadlarning bazi xossalari ko'rib chiqilgan. Har biriga misollar yechimlari bilan ko'rsatilgan.

Kópaǵzalılar túsiniǵı kóbinese sanlar maydanın keńeytiw arqalı kiritiledi. Yaǵnıy bazıbir P sanlar maydanı x elementi járdeminde belgili shártler arqalı keńeytirilip, $P[x]$ bir belgisizli kópaǵzalılar saqıynası dúziletuǵın edi.

Endi bizler kópaǵzalı túsiniǵın tártiplengen sanlı izbe-izlikler hám vektorlardan paydalanıp úyreniwdi qaraymız.

Meyli P - bazıbir maydan, n -teris emes pútun san, x - belgisiz san bolsın.

1-anıqlama. P -maydan ústinde x - belgisizli n – dárejeli kópaǵzalı dep

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots + f_nx^n, \quad (1)$$

túrdegi ańlatpaǵa aytamız.



Bunda f_k ($k = 0, \dots, n$) P -maydanniń elementleri bolıp, kópaǵzalınıń koefficientleri, al $f_n \neq 0$ bas koefficienti dep ataladı.

Dárejesi $n = 0$ bolǵan kópaǵzalı yaǵnıy P -maydanniń nollik emes elementleri skalyarlıq element yamasa turaqlı dep ataladı.

P -maydanniń nollik elementide skalyarlıq kópaǵzalı bolıp esaplanadı.

P -maydan ústindegi x - belgisizli barlıq kópaǵzalılardıń kópligi $P[x]$ arqalı belgilenedi. Kópaǵzalını qısqasha tómendegishe jazıwǵa da boladı:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k \quad f_n \neq 0 \quad (1a)$$

2-anıqlama. Eger eki $f(x)$ hám $g(x)$ kópaǵzalılarında

1) olardıń dárejeleri birdey;

2) barlıq sáykes keliwshi koefficientleri teń bolsa, onda olar teń kópaǵzalılar dep ataladı.

Eger $f(x)$ kópaǵzalısı (1) formula, al $g(x)$ kópaǵzalısı

$$g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_m x^m; \quad g_m \neq 0 \quad (2)$$

arqalı berilgen bolsa, onda 2-anıqlamadaǵı 1 hám 2 shártler tómendegi kóriniste boladı:

1) $n = m$ hám 2) qálegen $k = 0, \dots, n$ ushın: $f_k = g_k$

Kópaǵzalılardıń teńligi arifmetikalıq vektor-qatarlardıń teńligine uqsaslıǵın bayqaymız. Bul qatarlardıń uzınlıǵı $n + 1$ ge teń boladı.

$f(x)$ kópaǵzalısına vektor-qatar sáykes qoyıladı

$$\overline{f^t} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$$

Bul jerde hárqıylı dárejedege kópaǵzalılardı bir waqıtta qaraw jaǵdayına baylanıslı belgili qıyınshılıq kelip shıǵadı. Bul jaǵdayda sáykes vektorlar hár qıylı sıızqlı arifmetikalıq keńisliklerge tiyisli boladı, demek olardı qosıw múmkin emes. Onda koordinatları sheksiz izbe-izlikti dúzetuǵın biraq tek koordinatlarınıń shekli sanı nolden ózgeshe bolatuǵın sheksiz vektor-qatarlar túsiniǵın kiritiw arqalı sheshiwge boladı:

$$\overline{f^t} = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, 0, 0, \dots); \quad f_k \in P; \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad f_n \neq 0 \quad (3)$$

(3) túrdegi vektorlar kópligin P_0^∞ arqalı belgileyemiz. Bul kópliktiń elementleri ushın da qısqasha jazıw qollanıladı:

$$\overline{f^t} = (f_k)_{k=0}^\infty; \quad f_n \neq 0; \quad (\forall k > n) (f_k = 0) \quad (3a)$$

Elementleri P maydandan bolǵan $(f_k)_{k=0}^\infty$ túrdegi barlıq izbe-izliklerdiń kópligi P^∞ simvolı arqalı belgileyemiz. Komponentler boyınsha qosıw hám skalyarǵa kóbeytiw ámelleri anıqlanǵan P^∞ kópligi P maydan ústinde sıızqlı keńislik bolıp esaplanadı. P_0^∞ úles keńisligi P^∞ keńisliginde sıızqlı úles keńislik boladı. Bul úles keńisliktiń ózi sheksiz ólshemli bolıp esaplanadı. Kópaǵzalılar teńligi anıqlaması boyınsha $P[x]$ hám P_0^∞ kóplikleri arasında tábiyiy biekciya bar boladı: $f(x) \rightarrow \overline{f^t}$

$f(x)$ kópaǵzalınıń (1a) qısqasha jazılıwın tómendegi formada jazıwǵa boladı

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k x^k; \quad f_n \neq 0; \quad (\forall k > n) (f_k = 0) \quad (1b)$$

Eger P_0^∞ de $k > n$ nomerlerde barlıq f_k lar nolge aylanatuǵın $(f_k)_{k=0}^\infty$ izbe-izliklerden bolǵan úles kópligin ajratıp alsaq, onda P^{n+1} ge izomorflı bolǵan shekli ólshemli sıızqlı keńislik payda boladı. Bul úles keńisliktiń vektorlarına dárejesi berilgen n sanınan asıp ketpeytuǵın kópaǵzalılar juwap beredi; bunday kópaǵzalılar kópligi $P_n[x]$ arqalı belgilenedi.



Kópaǵzalıardı vektorlıq formada ańlatıw járdeminde kópaǵzalardıń teńligine arnalǵan (2) anıqlamanı keltirip ótiwge boladı: eki kópaǵzalı tek sáykes vektorları teń bolǵanda ǵana teń dep esaplanadı.

$$(f(x) = g(x) \leftrightarrow \overline{f^t} = \overline{g^t})$$

Anıqlama boyınsha hárbir kópaǵzalıǵa onıń dárejese dep atalatuǵın teris emes pútin san sáykes qoyıladı. Bul san $dárf(x)$ yamasa $dár f$ arqalı belgilenedi. Usılayınsha berilgen maydanda barlıq nollik emes kópaǵzalılar kópliginen barlıq teris emes pútin sanlar kópligine sáwlelendiriwshi “dáreje” funkciyası payda boladı:

$$dár: P[x] \setminus \{0\} \rightarrow N \cup \{0\}; f(x) \rightarrow dár f(x); f(x) \in P[x]; f(x) \neq 0 \quad (4)$$

Ayırım waqıtlarda $dár$ funkciyasın nolinshi kópaǵzalılarǵa da paydalanadı, bunda

$$dár(0) = -\infty \quad (5)$$

$P[x]$ kópaǵzalılar kópligi hám P_0^∞ sıızılıq keńislik arasındaǵı biekciya bolǵanı ushın kópaǵzalılar vektorlardagıday principte komponentleri boyınsha qosıladı hám skalyarǵa kóbeytilei. Bul $f(x)$ hám $g(x)$ kópaǵzalıları qosılǵanda sáykes dárejeleriniń koefficientleri qosılatuǵının ańlatadı. Yaǵnıy

$$h(x) = f(x) + g(x) \text{ ushın } h_k = f_k + g_k \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (6)$$

Meyli berilgen kópaǵzalılar (1) hám (2) formulalar menen anıqlansın. Bul jaǵdayda $k > \max(n, m)$ koefficientlerdiń barlıǵı nollik boladı. Eger $n \neq m$ yamasa $n = m$ bolsa, onda tómendegishe anıqlanadı.

$$\mathbf{1-qagıyda:} \quad dár(f(x) + g(x)) \leq \max(dár(f(x)), dár(g(x))) \quad (7)$$

Eger $dár(f(x)) \neq dár(g(x))$ bolsa, onda (7) teńsizlik teńlikke aynaladı.

1-mısal. 5 moduli boyınsha shegirmeler klassınıń maydanı F_5 te eki kópaǵzalını qaraymız:

$$f(x) = 4x^2 + x + 3; \quad g(x) = x^2 + 2x + 2$$

Bul kópaǵzalılarda algabralıq qosıw hám alıw ámellerin orınlasaq:

$$f(x) + g(x) = 3x; \quad f(x) - g(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

Demek, P maydanda $P[x]$ kópaǵzalılar kópligi P_0^∞ sıızılıq keńisligine izomorflı bolǵan sıızılıq keńislikti dúzedi.

P_0^∞ ke tiyisli bolǵan hár qanday vector-qatar basis qatarlardıń sıızılıq kombinaciyası kórinisinde ańlatıladı:

$$\overline{f^t} = \sum_{k=0}^n f_k \overline{e_k^t} \quad (8)$$

Bazis qatarlarǵa kópaǵzalılar keńisliginde basis kópaǵzalılar (biraǵzalılar) sáykes qoyıladı: $\overline{e_0^t}$ ǵa skalyar 1 sáykes; $\overline{e_1^t}$ ge x biraǵzalı; $\overline{e_2^t}$ ge x^2 hám t.b. sáykes qoyıladı. (1) formula mazmunı boyınsha $f(x)$ kópaǵzalını bazislik x^k biraǵzalılarǵa jiklewdi ańlatadı.

Meyli n -dárejeli $f(x)$ kópaǵzalısı (1b) formulası, al m -dárejeli $g(x)$ kópaǵzalısı da sonday formula arqalı berilgen bolsın:

$$g(x) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l x^l; \quad g_m \neq 0; \quad (\forall l > m) \quad (g_l = 0) \quad (2b)$$

Endi olardıń kóbeymesi bolǵan $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ kópaǵzalınıń jazılıwın tabamız. Qosındı indeksin jańa hárıp s ke ózgertemiz. $h(x)$ ushın jikleniwinde x^s ($s \geq 0$) dárejeler kóbeyme $x^s = x^k \cdot x^l$ nátiyjesi retinde alınadı, bunda k hám l qálegen teris emes pútin sanlar, $k + l = s$. Kórsetilgen kóbeymelerdiń hár birinde $f_k \cdot g_l$ ge teń bolǵan koefficientler payda boladı.



Gruppalar x^s ni qawistini sirtina shıgarıgannan keyin tómendegi koefficientlerge iye bolgan $h_s x^s$ birağızalı payda boladı.

$$h_s = f_0 g_s + f_1 g_{s-1} + \dots + f_{s-1} g_1 + f_s g_0 = \sum_{\substack{k \geq 0, l \geq 0 \\ k+l=s}} f_k g_l \quad (9)$$

Bul qosındı da qosılıwshılar sanı $s+1$ ge teń boladı, biraq ta olardıń bazıbirleri nolge teń bolıwı múmkin: f_k koefficienti $k > n$ bolğanda, g_l sáykes $l > m$ bolğanda nolge teń boladı. Demek, h_s koefficienti $s > n + m$ bolğanda nol boladı. Bul waqıtta $h_{s+m} \neq 0$ boladı, sebebi

$$h_{s+m} = f_n g_m \quad (10)$$

Skalyar (10) $h(x)$ kópağızalıń bas koefficienti boladı.

$$\mathbf{2-qagıyda:} \text{dár}(f(x) \cdot g(x)) = \text{dár}(f(x)) + \text{dár}(g(x)) \quad (11)$$

Demek, $P[x]$ kópliginde qosıw hám skalyarğa kóbeytiw ámeli menen birge (9) formula járdeminde úshinshi algebralıq ámel kóbeytiw anıqlanğan boladı.

Juwmağında P maydanda berilgen $P[x]$ kópağızalılar kópligi (6) hám (7) formulalar arqalı berilgen algebralıq qosıw hám kóbeytiw ámeleri menen kommutativlik saıyna dúzedi.

References:

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omarov, A.X.Xudoyberdiev, F.H.Haydarov, Algebra vasonlarnazariyasi, Toshkent "Tafakkurbo'stoni" 2019, 295 b. (o'quvqo'llanma)
2. Nazarov R.N., Toshpo'latov B.T., Dusumbetov A.D., Algebra va sonlar nazariyasi, I – qism 1993 y., II - qism, 1995 y.
3. Vinberg. E.B. Algebra mnogochlenov. Moskva-1980g. 175str.