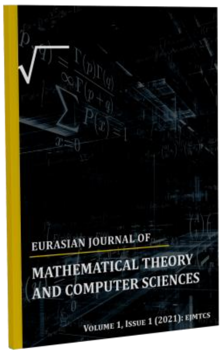
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz




# ANALITIK VA YASASH GEOMETRIYASIDA INVERSION ALMASHTIRISHLAR

[1]Abjalilov Sanaqul Xo'jamovich
Navoiy davlat pedagogika instituti, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent,
[2]Abjalilov Botir Xo'jamovich
Navoiy davlat pedagogika instituti huzuridagi akademik litsey o'qituvchisi,
[3]Xo'jamova Dilnoza
Navoiy davlat pedagogika instituti talabasi.
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7810007

ARTICLE INFO

Received: 29th March 2023
Accepted: 07th April 2023
Online: 08th April 2023

KEY WORDS

*Akslantirish, almashtirish, inversiya, involyutsiya, analitik geometriya, markazlar chizig'i, o`q simmetriyasi.*

ABSTRACT

*Maqolada tekislikdagi inversion almashtirishlar, ularning xossalari va analitik ifodasi haqida so'z yuritilgan. Muhim xossalar, teoremalar elementar va analitik usulda isbotlangan.*

Tekislikda to'g'ri chiziqni obrazi yana to'g'ri chiziq bo'luvchi affin alamashtirishlar va uning xususiy hollari bilan birga to'g'ri chiziqning obrazi har doim ham to'g'ri chiziq bo'lavermaydigan almashtirishlar ham keng o'rganiladi. Shunday almashtirishlardan biri inversiyadir. Biz ushbu maqolada inversiyaning analitik geometriya va yasash geometriyasida qo'llanilishiga oid masalalar ko'rib o'tamiz. Dastlab inversiyaning ta'rifi, asosiy xossalari va analitik ifodasini keltiraylik [1-3].

**Ta'rif:** Berilgan $u(O,r)$ aylana markazidan chiqqan nurning aylana markazigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi aylana radiusining kvadratiga teng bo'luvchi ikki nuqtasi shu aylanaga nisbatan inversion mos nuqtalar deyiladi va $u_O^r(A) = A'$ ko'rinishida ifodalanadi. Bu yerda $u(O,r)$ - inversiya aylanasi, $O$ - inversiya markazi, $r$ – inversiya radiusi deyiladi.

Inversiya involyutsion almashtirish hisoblanadi. Ya'ni, $A$ nuqtaning obrazi $A'$ nuqta bo'lsa, $A'$ nuqtaning obrazi $A$ nuqta bo'ladi.

Nuqtaga inversion nuqtani yasash (1-chizma):

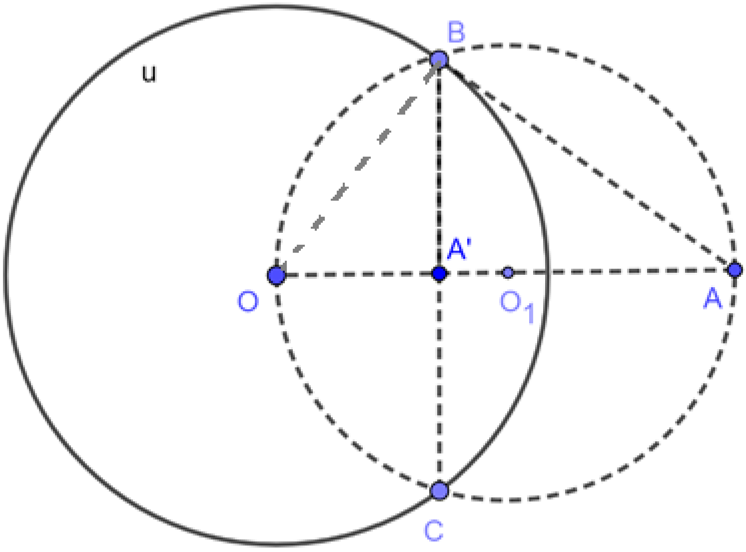
I. $A$ nuqta inversiya aylanasi tashqarisida bo'lsin. $OA$ kesmani diametr qilib yordamchi aylana chiziladi. Ikki aylananing o'zaro kesishgan $B$ va $C$ nuqtalarini tutashtiruvchi $BC$ vatar hamda $OA$ nur kesishgan nuqta izlangan $A'$ nuqta bo'ladi.

**Isbot.** Yasashga ko'ra $ABO$ va $A'BO$ to'g'ri burchakli uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{AO}{OB} = \frac{OB}{OA'} \rightarrow OA \cdot OA' = OB^2.$$

II. $A'$ nuqta inversiya aylanasi ichida bo'lsin. Inversiya involyutsion almashtirish ekanligidan avvalgi holga teskari ish olib boriladi. $OA'$ nurga uning $A'$ nuqtasidan perpendikulyar o'tkazilib, bu perpendikulyarning inversiya aylanasi bilan kesishgan $B$ (yoki $C$) nuqtasi orqali shu aylanaga urinma o'tkaziladi. Urinma va $OA'$ nurning kesishgan $A$ nuqtasi berilgan $A'$ nuqtaning inversion obrazi bo'ladi.

III. Agar nuqta inversiya aylanasida yotsa, unga inversion mos nuqta shu nuqtaning oʻzi boʻladi.




1-chizma

Inversion almashtirishning asosiy xossalarini qarab chiqamiz.

1. $A$ nuqta $OA$ nur boʻyicha $O$ markazdan cheksiz uzoqlashgan sari, $A'$ nuqta $O$ markazga cheksiz yaqinlashadi va aksincha.

2. Inversiya markazidan chiquvchi nur oʻz-oʻziga almashadi.

3. Inversiya radiusi cheksiz kattalashib borgan sari inversiya o'q simmetriyasiga aylana boradi.

**Teorema.** Umumiy markazli turli $r_1$, $r_2$ radiusli inversiyalar ko'paytmasi shu markazli va $\frac{r_2}{r_1}$ koeffitsentli gomotetiyadir, ya'ni

$$u_o^{r_1}(A)\cdot u_o^{r_2}(A') = H_O^{\frac{r_2}{r_1}}(A). \qquad (1)$$

**Isbot.** Haqiqatan,

$$u_o^{r_1}(A) \equiv OA\cdot OA' = r_1^2, \qquad (2)$$

$$u_o^{r_2}(A') \equiv OA'\cdot OA'' = r_2^2. \qquad (3)$$

(3) tenglikni (2) ga hadlab boʻlsak, $\frac{OA''}{OA} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$.

Bu esa berilgan ta'rifga muvofiq:

$$H_O^{\frac{r_2}{r_1}}(A) = A''.$$

Dekart koordinatalar sistemasida inversion almashtirishni qaraylik. Inversiya aylanasi markazi koordinatalar boshida bo'lgan $u(O,r)$ aylana, $A(x,y)$ va $A'(x',y')$ nuqtalar esa inversion mos boʻlsin. U holda

$\overline{OA}' = \lambda\overline{OA}$ ($\overline{OA}' \uparrow\uparrow \overline{OA} \to \lambda > 0$) $\to \overline{OA}'\cdot\overline{OA} = R^2 \to \overline{R^2} = \lambda\overline{OA}^2$ boʻladi. Bundan,

$$\overline{OA}' = \frac{r^2}{\overline{OA}^2}\overline{OA}.$$

Yuqoridagi vektor formadan, inversiyaning koordinatalardagi ifodasi kelib chiqadi

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2}r^2, \qquad y' = \frac{y}{x^2+y^2}r^2.$$

**Teorema:** Inversiya markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa inversion mos figura shu to‘g‘ri chiziqning o‘zidir.

Isbot ikkinchi xossa bilan asoslanadi.

**Teorema:** Inversiya markazidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqqa inversion mos figura inversiya markazidan o‘tuvchi aylanadir.

**Isbot.** Inversiya aylanasi markazidan berilgan $l$ to‘g‘ri chiziqqa $OA$ perpendikular o‘tkazib, $A$ nuqtaga inversion mos $A'$ nuqtani, $l$ to‘g‘ri chiziqning boshqa bir $B$ nuqtasiga inversion mos $B'$ nuqtani topamiz. Inversiya ta’rifiga ko‘ra,

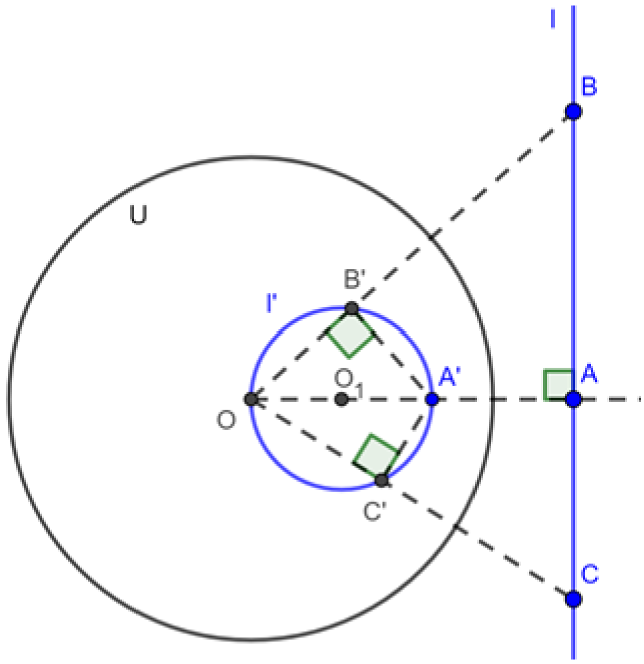
$OA \cdot OA' = R^2, OB \cdot OB' = R^2 \rightarrow \ OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \rightarrow$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Ushbu tenglik va bitta burchakning umumiyligidan $OAB$ va $OB'A'$ uchburchaklar o‘xshash bo’lib, bundan, $\angle OBA = \angle OA'B'$, $\angle OAB = \angle OB'A'$ va $\angle OB'A'$ burchakning to‘g’ri burchak ekanligi kelib chiqadi. Demak, $B'$ nuqta $OA'$ diametrli $l'$ aylanada yotadi.

Inversiya markazidan o‘tmaydigan to‘g’ri chiziqning obrazini yasash uchun:

- inversiya markazidan to‘g’ri chiziqqa perpendikular o‘tkazilib, uning asosi $A$ deb belgilanadi;
- $A$ nuqtaga inversion mos $A'$ nuqta topiladi. $OA'$ diametrli aylana berilgan to‘g’ri chiziqning inversion obrazi bo’ladi (2-chizma).




2-chizma

**Teorema.** Inversiya markazidan o‘tuvchi aylanaga inversion mos figura inversiya markazidan o‘maydigan to‘g‘ri chiziqdir.

Isbot yuqoridagi teorema va inversiyaning involyutsion almashtirish ekanligidan ko’rinadi.

**Teorema.** Inversiya markazidan o‘tmaydigan aylanaga inversion mos figura inversiya markazidan o‘tmaydigan aylanadir.

**Isbot.** $u(O, r)$ inversiya aylanasi O markazi va berilgan H aylana (inversiya markazidan o’tmaydigan) $O_1$ markazlari orqali markazlar chizig’ini o’tkazamiz (3-chizma). Markazlar

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

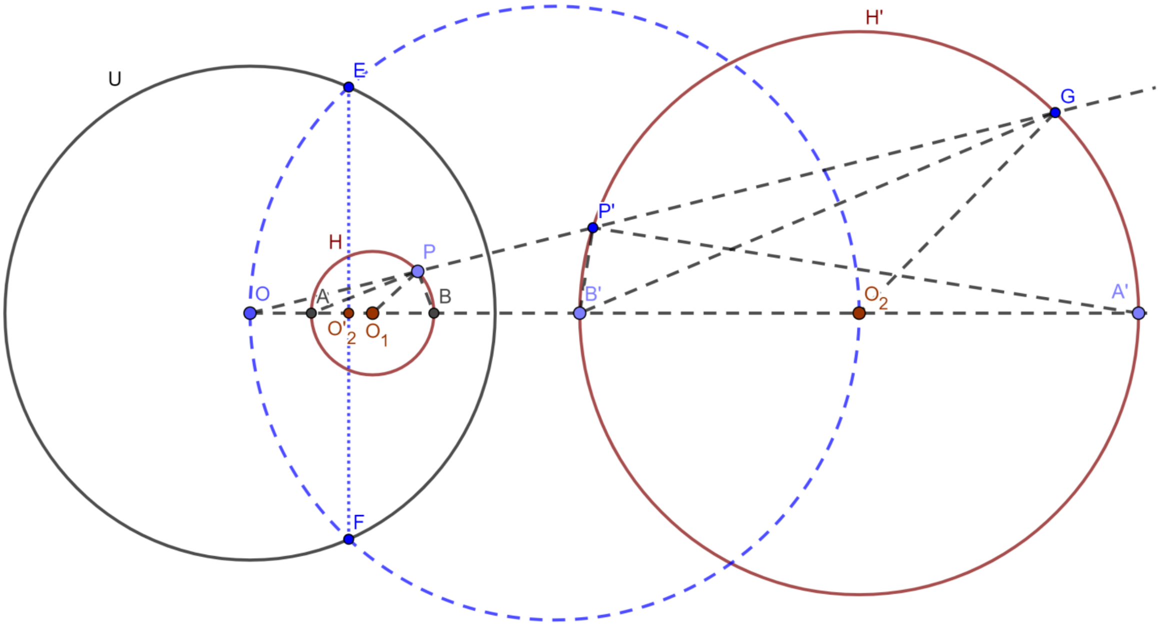
chizig'ining $H$ aylanani kesib o'tgan $A$ va $B$ nuqtalariga inversion mos nuqtalar $A'$ va $B'$ bo'lsin. $A'B'$ kesma diametrli $H'$ aylana berilgan aylananing obrazi ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

H aylanadagi ixtiyoriy $P$ nuqtaga inversion mos bo'lgan $P'$ nuqtaning $A'$ va $B'$ nuqtalar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan ∠A'P'B' burchakning ∠APB to'g'ri burchakka mosligini isbotlanishi kerak. Inversiyaning involutsion almashtirish ekanligi va -chizmaga asosan,

$OP \cdot OP' = OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2 \rightarrow \frac{OP}{OA} = \frac{OA\prime}{OP\prime}$ va $\frac{OP}{OB} = \frac{OB\prime}{OP\prime}$.

Bunga ko'ra $\Delta OPA \sim \Delta OP'A'$ va $\Delta OPB \sim \Delta OP'B'$, $\angle OPA = \angle OA'P'$, $\angle OPB = \angle OB'P'$, $\angle BPP' = \angle P'B'A'$.

$$\angle OAP = \angle OP'A'$$
$$\angle ABP + \angle APB = \angle OP'B' + \angle A'P'B'$$
$$\angle OBP + \angle APB = \angle OBP + \angle A'P'B'$$
$$\angle APB = \angle A'P'B'.$$




Demak, $P$ nuqta $H$ aylana bo'yicha harakatlanganda uning inversion obrazi $P'$ nuqta ham $H'$ aylana bo'yicha harakatlanar ekan. 3-chizma

**Xulosa:** Inversiya markazi, inversion mos aylanalarning markazlari bir to'g'ri chiziqda yotadi, ammo $H$ va $H'$ aylanalarning markazlari o'zaro inversion mos bo'lmaydi (3-chizma).

Endi inversiya markazidan o'tmaydigan aylanani analitik usulda inversion almashtirishni qaraylik:

Bizga $H(O_1, R)$ aylana ushbu tenglama bilan berilgan bo'lsin

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Bu tenglamada qavslarni ochib, quyidagi belgilashlarni kiritsak:

$$a = -2x_0, b = -2y_0, \quad c = x_0^2 + y_0^2 - R^2.$$

Tenglama, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ko'rinishga keladi.

Aylana inversiya markazidan o'tmasligi uchun $c \neq 0$ bo'ladi. Aylananing inversion obrazini topish uchun x, y ni $x'$, $y'$ orqali ifodasini tenglamaga keltirib qo'ysak:

$$\left(\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2+a\left(\frac{R^2x'}{x'^2+y'^2}\right)+b\left(\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}\right)+c=0$$

$$c(x'^2+y'^2)+R^2(ax'+by')+R^4=0$$

$$x'^2+y'^2+\frac{R^2}{c}(ax'+by')+\frac{R^4}{c}=0$$

Bu tenglama inversiya markazidan o‘tmaydigan aylanani aniqlaydi. Demak, inversiya markazidan o‘tmaydigan aylananing inversion obrazi inversiya markazidan o‘tmaydigan aylana bo’lar ekan.

Yuqorida keltirib o’tilgan inversiya xossalaridan yasash geometriyasida keng foydalaniladi. Jumladan, Apoloniy masalalarini yechishda inversiyadan foydalanish masalani sodda yechilishini ta’minlaydi.

## References:

1. Abjalilov S.X., Kamolov N.M., Xo‘jamova D.S. TEKISLIKDA AKSLANTIRISHLAR VA ALMASHTIRISHLAR, Results of National Scientific Research SCIENTIFIC-METHODICAL JOURNAL, 5 MAY 2022, PART-1, www.academics.uz
2. Abjalilov S.X., Begmurodov O.A., Sadullayeva I.P., KONUS KESIMLARI VA ULARNING FOKUSLARI, Scientifik Journal of SCIENTIFIC PROGRESS, ISSN: 2181-1601, 2022/IV, Volume #3, ISSUE #4, http://sjifactor.com/passport.php?id=22257
3. Abjalilov S.X., Ashurova D.N., Begmurodov O.A. ON MODELING OF MECHANICAL VIBRATIONS OF ORTHOTROPIC BOARDS IN ELECTRONIC DEVICES, ACADEMICIA An International Multidisciplinary Research Journal (Double Blind Refereed & Peer Reviewed Journal) Vol. 11, Issue 4, April 2021