



ГРУППЫ, ВСЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОТОРЫХ, ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫ

Муминов К.К., Султонова Б.Р.

ГДУ ўқитувчиси

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7203260>

ARTICLE INFO

Received: 01st September 2022
Accepted: 03rd September 2022
Online: 05th September 2022

KEY WORDS

чизикли — редуktiv группа (α - группа), инвариант элемент, инвариант функционал.

ABSTRACT

Маколада тасвирларнинг инвариант векторлари ва функционалари етарли даражада куп бўлган группалар ва уларнинг хоссалари ўрганилган (бундай группалар мос равишда α, β, γ группалар деб аталган).

1 Введение. В работе Т. Спрингера ([1]. С.27) предложена следующая важная характеристика редуktivных групп в классе линейных алгебраических групп: линейная алгебраическая группа G является редуktivной тогда и только тогда, когда любое ее рациональное представление полупросто (представление ρ группы G в векторном пространстве E называется полупростым, если для любого $\rho(G)$ инвариантного подпространства в E существует $\rho(G)$ —инвариантное дополнение).

Под рациональным представлением линейной алгебраической группы G понимается такое представление ρ в конечномерном векторном пространстве E , у которого элементы матрицы $\rho(g)$ (в некотором базисе пространства E) являются рациональными функциями от элементов g_{ij} матрицы $\rho \in G$. Возникает естественный вопрос об описании

класса групп у которых все представления, а не только рациональные, обладают свойством полупростоты. Исследование класса редуktivных групп осуществлено в серии работ [2-6], где, в частности, доказано, что всякое представление группы G является полупростым в том и только в том случае, когда G -конечная группа. Кроме того, введены классы групп, представления которых обладают теми или иными свойствами, связанными с наличием инвариантных векторов или инвариантных функционалов. Установлены связи между этими классами групп и другие полезные свойства (помимо полупростоты), которыми обладают представления конечных и компактных групп.

В [2-6] вводятся варианты понятия линейной редуktivности и изучаются их взаимосвязи, В данной работе продолжается исследование некоторых



классов групп, введенных в [2-6], и приведен пример группы, не являющейся

$f\alpha$ -группой. Терминология и обозначения взяты из [1-6].

2. Предварительные сведения

Напомним, что совокупность элементов G ; называется группой, если в G заданы две операции: каждой паре g, h элементов из G ставится в соответствие их произведение $g \cdot h$ из G и каждому элементу g из G ; ставится в соответствие элемент g^{-1} из G . При этом должны иметь место следующие свойства:

- 1) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$;
- 2) Существует такой элемент $1 \in G$ у, что $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$;
- 3) $g \cdot g^{-1} = 1$.

Пример. Совокупность всех вещественных матриц n -го порядка с не равным нулю определителем есть группа, если определить в ней умножение как умножение матриц; эта группа обычно обозначается $GL(n, R)$. Единицей в ней является единичная матрица, а обратным элементом к матрице g является обратная матрица g^{-1} .

Отображение f группы G в группу G' называется гомоморфизмом из G в G' , если $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

Пусть E линейное пространство над полем действительных чисел R .

Представлением группы G в векторном пространстве E называется всякий гомоморфизм группы G в группу $Aut E$, где $Aut E$ -группа автоморфизмов (обратимых линейных операторов) пространства X . Другими словами, представление группы G в пространстве E есть операторная функция $\rho: G \rightarrow$

$End E$, удовлетворяющая соотношением:

$$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2), \rho(e) = 1 \quad [7].$$

3. Алгебраические варианты понятия линейной редуктивности, их взаимосвязи.

Пусть E векторное пространство над полем вещественных чисел R , E' -линейное пространство всех линейных функционалов на E , $Aut(E)$ - группа автоморфизмов (обратимых линейных операторов) пространства E . Пусть G -некоторая группа и $\rho: G \rightarrow Aut(E)$ -линейное представление G в E (если фиксировано, то вместо $\rho(g) \cdot x$ будет использоваться запись gx). Через E^G обозначим подпространство G -инвариантных элементов в E т.е. $E^G = \{x: gx = x \text{ для всех } g \in G\}$. а через $(E')^G$ обозначим подпространство G -инвариантных функционалов в E' , т.е. $(E')^G = \{f: gf = f \text{ для всех } g \in G\}$ для всех f , где $(gf)(x) = f(g(x)), x \in E$.

Группу G назовем α -группой, если для любого линейного представления $\rho: G \rightarrow Aut(E)$ и любого вектора $x \in E^G, x \neq 0$ существует G -линейный функционал $f \in (E')^G$, обладающий свойством $f(x) \neq 0$.

Группа G называется β -группой [2], если для любого ее линейного представления $\rho: G \rightarrow Aut(E)$ и любого $(E')^G$ ненулевого $f \in (E')^G$ существует элемент $x \in E^G$, такой, что $f(x) \neq 0$.

Пусть $\rho: G \rightarrow Aut(E)$ линейное представление группы G .

Подпространство $U \subset E$ называется G -инвариантным если $\rho(g)u \in U$ для всех $u \in U$ и всех $g \in G$.

Группу G называется γ -группой, если для любого линейного представления



$\rho: G \rightarrow Aut(E)$ и любого G -инвариантного подпространства U в E существует G -инвариантное дополнение (т.е. $E = U \oplus W$ — есть прямая сумма подпространств U и W).

Предложение 1. Всякая γ — группа является α -группой.

Доказательство. Пусть $\rho: G \rightarrow GL(n, R)$ произвольное линейное представление группы G , $0 \neq x \in E^G$. Поскольку $\rho - \gamma$ — представление, то существует G -инвариантное подпространство E_x , дополнительное к одномерному инвариантному подпространству C_x . Рассмотрим линейный функционал f в E , определенный следующим образом: $f(y) = 0, y \in E_x$ и $f(x) = 0$.

Тогда $y \in E, f$ инвариантен относительно G и $f(x) \neq 0$. Следовательно, $G - \alpha$ -группа.

Теорема 2. Для группы G следующие условия эквивалентны:

- (1). G является группой класса β .
- (2). G является группой класса γ .

Доказательство. (1) \rightarrow (2). Пусть $\rho: G \rightarrow Aut(E)$ произвольное линейное представление и H является G -инвариантным подпространством в $E, H \neq 0$ и $H \neq E$

Пусть $Z(E) = Hom_c(E, E)$ — пространство всех линейных отображений из E в E .

G — действует в $Z(E)$ следующим образом $\tilde{g}A = gAg^{-1}$, где $g \in G, A \in Z(E)$.

Поскольку H — векторное подпространство в E , то существует векторное подпространство L в E алгебраически дополнительное к H в E , т.е.

$$E = H + L, H \cap L = \{0\}$$

Пусть ρ_0 (соотв. ρ_1) — оператор проектирования на H (на L) параллельное подпространству L (подпространству H). Тогда $1 = \rho_0 + \rho_1$

Из $g\rho_0 = \rho_0g\rho_0$ следует: действительно, $\tilde{g}P_0 = P_0\tilde{g}P_0$: действительно, $P_0\tilde{g}P_0 = P_0gP_0g^{-1} = g\rho_0g^{-1} =$

Рассмотрим следующие линейные оболочки в пространстве $Z(E)$:

$$W = \text{л.о.} \{ \tilde{g}\rho_1, g \in G \} = W(\rho_1),$$

$$V = \text{л.о.} \{ (\tilde{g} - 1)\rho_1, g \in G \} = V(\rho_1).$$

Имеем, что $W = V + c\rho_1$

Покажем, что $V \cap c\rho_1 = \{0\}$.

Действительно, $\rho_1E = L$, в то же время $(\tilde{g} - 1)\rho_1 = \tilde{g}\rho_1 - \rho_1 = (\tilde{g} - 1)\rho_1 - \rho_1 = 1 - \tilde{g}\rho_0 - \rho_1 = \rho_0 - \tilde{g}\rho_0 = \rho_0^2 - \tilde{g}\rho_0 = \rho_0^2 - \rho_0\tilde{g}\rho_0 = \rho_0(1 - \tilde{g})\rho_0$.

Отсюда $T(E) \subset H$ для любого $T \in V$, и потому $V \cap c\rho_1 = \{0\}$. Таким образом $W = V \oplus c\rho_1$. Следовательно, W можно представить в виде $W = c\rho_1 \oplus \ker f$, где $0 \neq f \in W, \ker f = V$.

Пусть w — произвольный элемент из W , т.е. $w = c\rho_1 + w_1$, тогда $f(w) = cf(\rho_1) + f(w_1) = cf(\rho_1)$.

Можно считать, что $f(\rho_1) = 1$, поэтому $c = f(w)$ $w_1 = w - f(w)\rho_1$. Таким образом $w = f(w)\rho_1 + (w - f(w)\rho_1)$. Покажем, что f есть G -инвариантный функционал.

Действительно, $f(\tilde{g}(c\rho_1 + v)) = f(c\tilde{g}\rho_1 + \tilde{g}v) = f(c\rho_1 - c\rho_1 + c\tilde{g}\rho_1 + \tilde{g}v) = f(c\rho_1 + c(\tilde{g} - 1)\rho_1 + \tilde{g}v) = c = f(c\rho_1 + v)$, где $c(\tilde{g} - 1)\rho_1 + \tilde{g}v \in V$. Значит, f является G -инвариантным.

Поскольку группа G является β -группой, то для такого функционала f существует G -инвариантный элемент $p_1 + Q_0 = p_2 \in W$ (где $Q_0 \in V$), что $f(p_2) \neq 0$. Определим $L_1 = p_2E$. Поскольку p_2 является G -инвариантным, то L_1 тоже



G — инвариантно: действительно так как $\tilde{g}p_2 = gp_2 = gp_2p^{-1} = p_2$, то $gp_2 = p_2g$. Отсюда следует, $gx \in L_1$, для любого $x \in L_1$, т.е. L_1 является G — инвариантным.

Поскольку $p_1H = 0$, то $T(H) = 0$ для любого $T \in V$, в частности, $Q_0H = 0$. Отсюда $p_2H = (p_1 + Q_0)H = 0$.

Таким образом $L_1 = p_2E = p_2(H + L) = p_2L$.

Для любого $x \in E$ имеем $x = p_0x + p_1x = p_0x + (p_2 - Q_0)x = (p_0 - Q_0)x + p_2x$.

Учитывая что $(p_0 - Q_0)x \in H$ и $p_2x \in L_1$, получим, что $E = H + L_1$.

Если $z \in H \cap L_1$ то $z \in L_1 = p_2L$ т.е. $z = p_2y$ ($y \in L$). В то же время $z \in H$, т.е. $p_1z = 0$ и $0 = p_1z = p_1p_2y = p_1(p_1 + Q_0)y = (p_1^2 + p_1Q_0)y = p_1y + p_1Q_0y = p_1y$. Отсюда $y = 0$ и $z = 0$. Таким образом $E = H \oplus L_1$.

(2) \rightarrow (1). Пусть $0 \neq f \in E' f$ есть G инвариантный линейный функционал, $V = \ker f$. Тогда существует такое $v \in E$, что $E = Cv \oplus \ker f$

(т.е. произвольный элемент $w \in E$ можно представить в виде $w = \frac{f(w)}{f(v)}v + (w - \frac{f(w)}{f(v)}v)$)

Ясно, что $V = \ker f G$ — инвариантно. Тогда из условия (2) следует что существует G — инвариантное подпространство $H \subset E$, для которого $E = H \oplus V$. Так как $\text{codim}V = 1$, то $\text{dim}H = 1$, т.е. $H = Cv_0, v_0 \neq 0, v_0 \in E$ и $f(v_0) \neq 0$. Так как $H G$ — инвариантно, то $gv_0 \in H g \in G$. Пусть $gv_0 = c_1v_0$, тогда $0 \neq f(v_0) = gf(v_0) = f(cv_0) = c_1f(v_0)$. Откуда $c_1 = 1$, и поэтому $gv_0 = v_0$ при любом $g \in G$. Следовательно, группа G есть β группа. Теорема доказана.

Следствие 3. Всякая p группа является α — группой. Доказательство вытекает из предложения 1. и теоремы 2.

Группу назовем группой класса $f\alpha$ (соответственно $f\beta$ и $f\gamma$), если всякое ее конечномерное линейное представление является α (соответственно β и γ) — представлением.

Имеет место [8]

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G является группой класса $f\alpha$;
- 2) G является группой класса $f\beta$;
- 3) G является группой класса $f\gamma$.

Приведем пример группы, не являющейся $f\alpha$ - группой.

Пусть $G_0 + GL(n, R)$. Через $G_0 \times R^n$ обозначим множество всех пар (g_0, t) , $g_0 \in G_0, t \in R^n$, наделенное следующей алгебраической операцией:

$(g_0, t)(g_0', t') = (g_0g_0', t' + (t^T g_0')^T)$, где $t =$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in R^n, \quad t^T = (t_1 \cdot \cdot \cdot t_n),$$

$$(t_1 \cdot \cdot \cdot t_n)^T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Предложение 5. Множество $G_0 \times R^n$ с введенной алгебраической операцией является группой, при этом G_0 отождествляется с подгруппой $\{(g_0, 0): g_0 \in G_0\}$ а R^n с нормальным делителем $\{(e, t): t \in R^n\}$, где e единица в G_0 , а 0 нуль в R^n .

Доказательство. Элемент $(e, 0)$ очевидно, является единицей в $G_0 \times R^n$. Обратным элементом для (g_0, t) , служит элемент $(g_0^{-1}, -(g_0^{-1})^T t)$, где g_0 отождествляется с матрицей $(a_{ij})_{ij=1}^n, g_0^T$ есть



транспонированная к g_0 матрица. Свойство ассоциативности введенной алгебраической операции проверяется непосредственно. Для любых $(g_0, s) \in G_0 \times R^n$ и $(e, t) \in G_0 \times R^n$ имеем $(g_0, s)(e, t)(g_0, s)^{-1} = (g_0, t + s)(g_0^{-1}, (g_0^{-1})^T t) = (e, -(g_0^{-1})^T t) + ((t + s)^T g_0^{-1})^T = (e, -(g_0^{-1})^T t) + (g_0^{-1})^T t + (g_0^{-1})^T s = (e, g_0^{-1})^T s$, т.е. $\{(e, t) : t \in R^n\}$ - нормальный делитель в $G_0 \times R^n$.

Предложение 6. Группа $G_0 \times R^n$ не является $f\alpha$ группой.

Доказательство. Рассмотрим $E = R^1 \oplus R^n$ с базисом $\{e_i\}_{i=0}^n, \{e_0\}$ - базис в $R^1, \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ - базис в R^n . И пусть E' пространство всех линейных функционалов на пространстве E . Элементы x из E будем отождествлять с векторами — столбцами.

$$(x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}), x_0 \in R^1, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Для каждого $f \in E'$ положим $f_i = f(e_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Ясно, что } f(x) = f \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = f_0 x_0 + f_1 x_1 + \dots + f_n x_n = f_0 x_0 + f(x),$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$. Определим действие G в E следующим образом: для $(g_0, t) \in G$ положим $\rho_{(g_0, t)} x = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t^T x \\ g_0 x \end{pmatrix}$. Это действие является представлением группы G , поскольку $\rho_{(g_0, t)} \rho_{(g_0', t')} x = \rho_{(g_0, t)(g_0', t')} x$.

Если $\rho_{(g_0, t)} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$, для всех $g_0 \in G_0, t \in R^n$, то $t^T x = 0$ при всех $t \in R^n$, что влечет $x = 0$. Следовательно, $E^G = \{\lambda e_0\}_{\lambda \in R}$.

С другой стороны по определению действия G в E' имеем

$$(\rho_{(g_0, t)} f)(x) = f(\rho_{(g_0, t)} x) = f \begin{pmatrix} x_0 + t^T x \\ g_0 x \end{pmatrix} = f_0(x_0 + t^T x) + f(g_0 x) = f_0(x) + f_0(t^T x) + f(g_0 x).$$

В частности при $g_0 = e$ имеем $(\rho_{(e, t)} f)(x) = f_0(x) + f_0(t^T x) + f(x)$. Следовательно, равенство $(\rho_{(e, t)} f)(x) = f(x) = f_0(x) + f(x)$ выполняется для всех $t \in R^n, x \in E^G$ тогда и только тогда, когда $f_0 = 0$. Отсюда следует, что если $f \in E'$ и $f_0 = f(e_0) \neq 0$, то f не может быть инвариантным. Это означает, что группа G не является $f\alpha$ -группой.

References:

1. Спрингер Т. Теория инвариантов М. Мир. 1981. 192с.
2. КК. Муминов. "Различные варианты понятия линейной редуктивности и их свойства". Узбекский математический журнал. 1994, № 1, с. 47-51.
3. КК. Muminov "The property (ta) for locally compact connected groups"
4. "Algebra and operator theory" Proceedings of the colloquium in Tashkent sept.- oct., 1997. kLUWER Academic Publishers, 1998 207-211.
5. КК. Muminov certain representation of topological groups" Bulletin of the Malaysian Mathematical Society (second series) V .21 № 2.
6. 1998, p. 107-112.
7. КК. Муминов "Свойства редуктивности для дискретных топологических групп" Узбекский математический журнал. 1999, №2.



9. с. 39-43.

10. КК. Муминов “Критерий компактности линейно редутивных групп“ ДАН РУз. 1999 № 2. С. 9-12.

11. Желобенко Д.П. Введение в теорию представлений. М.: Фактори пресс. 2001.136 с.

12. КК. Муминов, В.И.Чилин «Группы, все конечномерные представления которых вполне приводимы» Узбекский математический (в печати).