



## НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бекиев А.Б.<sup>1</sup>, Мамбетов А.Б.<sup>2</sup>, Бабаназаров Д.Ж.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>кандидат физико-математических наук, доцент,  
Каракалпакский государственный университет,

<sup>2</sup>ассистент преподаватель, кафедры «Математики, физики,  
химии и информационных технологий» Каракалпакский  
институт сельского хозяйства и агротехнологии,

<sup>3</sup>ассистент преподаватель, кафедры «Математики, физики,  
химии и информационных технологий» Каракалпакский  
институт сельского хозяйства и агротехнологии

<https://doi.org/10.5281/zenodo.5797502>

### ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 01 декабрь 2021 г.  
Утверждено: 05 декабрь 2021 г.  
Опубликовано: 08 декабрь 2021 г.

### АННОТАЦИЯ

*В прямоугольной области установлен критерий единственности и существования решения нелокальной задачи для уравнения четвертого порядка.*

### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

нелокальная задача,  
биортогональный ряд,  
единственность,  
существование, базис  
Рисса.

**Введение.** К краевым задачам для уравнений частных производных четвертого порядка сводятся многие задачи науки и техники: задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, поперечные колебания стержня и балок и другие. Из этого вытекает важность изучения краевых задач для уравнений четвертого порядка. В работе [1] исследованы краевые задачи четного порядка в прямоугольной области. Для решения рассматриваемых некоторых задач получены априорные оценки. А в работе [2] изучены вопросы

классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Краевые задачи для вырождающегося уравнения второго порядка с нелокальными и локальными условиями исследованы в [5-7].

В этой работе исследованы начально-граничные задачи для вырождающегося уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями. Показаны существование и единственность решения задачи.

**Постановка задачи.** В области  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < \beta\}$  рассмотрим уравнение



$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) + t^m u_{xxxx}(x,t) + b^2 t^m u(x,t) = 0 \quad (1)$$

где  $m = const > 0, b = const$ .

**Задача 1.** Найти решение  $u(x,t)$

в области  $\Omega$  уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

Система функций

$$X_0(x) = 2x, \quad X_{1n}(x) = 2 \sin \lambda_n x, \quad X_{2n}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin \lambda_n x, \quad X_{2n}(x) = 2 \cos \lambda_n x \quad (4)$$

и биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1, \quad Y_{1n}(x) = \frac{e^{\lambda_n x} + e^{\lambda_n(1-x)}}{e^{\lambda_n} - 1} + \sin \lambda_n x, \quad Y_{2n}(x) = 2 \cos \lambda_n x \quad (5)$$

образуют базис Рисса в  $L_2(0,1)$  [2].

Имеет место следующая теорема.

**Единственность и существование решение задачи.**

**Теорема.** Если функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  удовлетворяют следующим

условиям:  $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(5)}[0,1]$ ,

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1),$$

$$\psi'(0) = \psi'(1), \quad \varphi''(1) = 0, \quad \psi''(1) = 0,$$

$$\varphi'''(0) = \varphi'''(1), \quad \psi'''(0) = \psi'''(1),$$

$\varphi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(0) = 0$ , то существует единственное регулярное решение задачи 1.

**Доказательство.** Решение задачи 1 ищем в виде ряда

$$u(x,t) = u_0(t) X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_{1n}(t) X_{1n}(x) + u_{2n}(t) X_{2n}(x)] \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (1), получим следующие уравнения для нахождения функций

$$u_0(t), u_{1n}(t), u_{2n}(t):$$

$$u_0''(t) + b^2 t^m u_0(t) = 0,$$

$$u_{in}''(t) + (\lambda_n^4 + b^2) t^m u_{in}(t) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

Решение уравнение (7) примет вид:

$$u_{in}(t) = a_0 \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(\lambda_n p_0 t^q) + b_0 \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(\lambda_n p_0 t^q),$$

где  $a_0, b_0$  - пока неизвестные

константы,  $p_0 q = b, q = \frac{1}{2}(m+2)$ ,

$J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q), Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q)$  - функции

Бесселя I и II рода соответственно. Для определения  $a_0$  и  $b_0$  используем условия (2), которое переходят в виде

$$u_0(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx = \varphi_0, \quad u_0'(0) = \int_0^1 \psi(x) dx = \psi_0 \quad (9)$$

Тогда решение (7) удовлетворяющий условиям (9) имеет вид

$$u_0(t) = \left( \gamma_0 \psi_0 + \gamma_0^{-1} \frac{\pi \varphi_0}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right) \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) - \gamma_0^{-1} \psi_0 \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q)$$

где  $\gamma_0 = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_0}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}}, \Gamma(\cdot)$  -

гамма функция.

Решение уравнение (8) удовлетворяющим условиям (8)



$$u_{in}(0) = \int_0^1 \varphi(x) Y_{in}(x) dx = \varphi_{in}, \quad u'_{in}(0) = \int_0^1 \psi(x) Y'_{in}(x) dx = \psi_{in} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_n \psi_{in} \right\} \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q)$$

примет вид:

$$u_{in}(t) = \left[ \gamma_n \psi_{in} + \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right] \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \left\{ \lambda_n^4 X_{in}(x) \right.$$

где

$$\gamma_n = \frac{1}{2q} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right) \left(\frac{p_n}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}, \quad (p_n q)^2 = \lambda_n^4 + b^2$$

Пусть  $0 \leq t \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ . Используем асимптотические формулы для функций Бесселя в окрестности  $t = 0$  [3]

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

Тогда решение задачи (1) представляется в виде ряда

оценим функции, определенным равенством (11)

$$u(x,t) = \left\{ \gamma_0^{-1} \frac{\varphi_0}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_0 \psi_0 \right\} \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} + \gamma_n \psi_{in} \right\} \sqrt{t} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \frac{\varphi_{in}}{2q} \sqrt{t} Y_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \left\{ \lambda_n^4 X_{in}(x) \right\}$$

Таким образом, мы построили формальное решение задачи (1)-(3) в виде (10).

Пусть  $0 < \varepsilon \leq t \leq \beta$ . Тогда на основании поведения функция Бесселя в бесконечности [3]

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Теперь нам нужно доказать  $u(x,t) \in C^{4,2}(\bar{\Omega})$ . В области  $\bar{\Omega}$  покажем равномерную сходимость рядов

оценим функции (11)

$$|u_{in}(x,t)| \leq C_1 + C_5 \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |\gamma_n| |\psi_{in}| p_n^2 p_n^{-\frac{1}{2}} + |\gamma_n^{-1}| |\varphi_{in}| p_n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2q}} \right\}$$

$$u_{in}(x,t) = \left\{ -\gamma_0 \psi_0 q J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) - \gamma_0^{-1} \varphi_0 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_0 t^q) \right\} + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\gamma_n \psi_{in} q J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \varphi_{in} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\gamma_n \psi_{in} q J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) - \gamma_n^{-1} \varphi_{in} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_n t^q) \right\} \left\{ \lambda_n^4 X_{in}(x) \right\}$$

Функций  $\varphi(x), \psi(x)$  разлагаются в ряд Фурье по  $x$  на  $[0,1]$   $\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{1n} X_{1n}(x) + \varphi_{2n} X_{2n}(x)]$



$$\psi(x) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{1n} X_{1n}(x) + \psi_{2n} X_{2n}(x)] a_{1n} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, b_{1n} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx,$$

где коэффициенты  $a_{2n} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n(1-x)} dx, b_{2n} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) e^{-\lambda_n x} dx,$   
 $\varphi_0, \varphi_{1n}, \varphi_{2n}, \psi_0, \psi_{1n}, \psi_{2n}$  вычисляются

по формулам

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{1n}(x) dx, \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2n}(x) dx, \bar{\varphi}_{1n}^{(5)} = \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \bar{\varphi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx,$$

(15)

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) Y_0(x) dx, \psi_{1n} = \int_0^1 \psi(x) Y_{1n}(x) dx, \psi_{2n} = \int_0^1 \psi(x) Y_{2n}(x) dx, \bar{\psi}_{1n}^{(5)} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx, \bar{\psi}_{2n}^{(5)} = 2 \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx,$$

(16)

Интегрируя по частям пять раз второй и третий интегралы в (15), (16) получаем:

$$\varphi_{1n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{1n} + b_{1n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{1n}^{(5)}, \varphi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\varphi}_{2n}^{(5)},$$

$$\psi_{1n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \frac{e^{\lambda_n}}{e^{\lambda_n} - 1} [-a_{2n} + b_{2n}] + \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{1n}^{(5)}, \psi_{2n} = \frac{1}{\lambda_n^5} \bar{\psi}_{2n}^{(5)}$$

где

Если значения  $\varphi_{in}, \psi_{in}, i=1,2$  подставить в (13) и (14), то нетрудно видеть, что эти ряды сходятся абсолютно в области  $\bar{\Omega}$ . Тогда на основании признака Вейерштрасса, ряды в (11) сходятся абсолютно и равномерно в области  $\bar{\Omega}$ . Из сходимости рядов (11) следуют сходимости (12). Единственность решения задачи следует из представления (10), а также из полноты системы (5). Теорема доказана.

### ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка. Автореф. дис. ... докт. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз, 2019. – 64 с.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. –Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. Дунаев А.С., Шлычков В.И. Специальные функции. Екатеринбург. 2015. 1322 с.
4. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. –№1. – С. 74-80.
5. Сабитова Ю.К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2009. №12, с. 49-58.
6. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Современная математика и приложения. Тематические обзоры. Том 137 (2017). С. 26-60.



1. Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. 2015. №12, с. 55-65.