



SOME PROPERTIES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Madiyarova Biybinaz

Nukus State Pedagogical Institute named after ajiniyaz,
Student of the Faculty of Exact Sciences

Dosnazarova Gulrabo

Nukus State Pedagogical Institute named after ajiniyaz,
Student of the Faculty of Exact Sciences

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17425546>

ARTICLE INFO

Received: 16th October 2025

Accepted: 22nd October 2025

Online: 23rd October 2025

KEYWORDS

Single-variable function,
function, derivative,
differential, continuity.

ABSTRACT

The basic concepts of mathematical analysis are function, derivative, differential, and continuity. These concepts form the basis of theoretical mathematics, as well as physics, technology, economics, and many other sciences. The article outlines the characteristics of these concepts and presents the connections between them.

DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALARNING BAZI XOSSALARI

Madiyarova Biybinaz

Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
Aniq fanlar fakulteti talabasi

Dosnazarova Gulrabo

Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti,
Aniq fanlar fakulteti talabasi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17425546>

ARTICLE INFO

Received: 16th October 2025

Accepted: 22nd October 2025

Online: 23rd October 2025

KEYWORDS

Bir o'zgaruvchili funksiya,
funksiya, hosila, differensial,
uzluksizlik.

ABSTRACT

Matematik analizning asosiy tushunchalari funksiya, hosila, differensial va uzluksizlikdir. Bu tushunchalar nazariy matematikaning, shu bilan birga fizika, texnika, iqtisodiyot va boshqa ko'plab fanlarning ham asosini tashkil etadi. Maqolada ushbu tushunchalarning xususiyatlari aytib o'tiladi va shu bilan birga bu tushunchalar orasidagi bog'lanishlar keltiriladi.

Kirish. Bizga ma'lum bir o'zgaruvchili funksiyalarda funksiya uzluksizligi ta'rifi quyidagicha berilar edi.

1^o. Funksiya uzluksizligi ta'riflari. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar quyidagi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(1)



mavjud va chekli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Odatda, $x - x_0$ ayirma argumentning orttirmasi, $f(x) - f(x_0)$ bo'lsa funksiyaning orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δf ko'rinishda belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

U holda, funksiya uzluksizligining 1-ta'rifidagi (1) munosabat

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \tag{2}$$

ko'rinishga keladi. Demak, (2) munosabatni ham x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qarash mumkin.

$X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

2-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan(chapdan) uzluksiz bo'lganda funksiyaning o'ng (chap) limiti uning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Keltirilgan ta'riflardan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lishini topamiz.

Umuman olganda, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham o'ngga qarap shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsa,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bo'lishini bildiradi.

Funksiyaning uzluksizligi. (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ da $f(x)$ funksiya $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.

Bizga ma'lum, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$f(x_0 + 0), \quad f(x_0 - 0) \tag{3}$$

bor bo'lib,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.



2°. Funksiya hosilasining ta’rifi. $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset R$ da aniqlangan bo’lib, $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo’lsin. Bizga ma’lum bu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

3-Ta’rif. Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ munosabat limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo’lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi, odatda,

$$f'(x_0), \text{ yoki } y'_{x=x_0}, \text{ yoki } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

ko’rinishda belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deb olinsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo’lib, natijada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo’ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \rightarrow x_0$ da

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

munosabat limiti sifatida ham aniqlanishi mumkin. Ya’ni

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ko’rinishda aniqlanadi.

Misol 1. Bizga $f(x) = |x|$ funksiya berilgan bo’lsin. Bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi

orttirmasi $\Delta y = |\Delta x|$ bo’ladi, lekin $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ning limiti mavjud bo’lmaydi, sababi

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. Demak, $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega bo’lmaydi.

3°. Funksiya differensial. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo’lsin. $x \in (a, b)$ nuqtani olib, unga shunday Δx orttirma beraylikki, natijada $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$ bo’lsin. U holda $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmaga ega



bo'ladi. Bundan bizga ma'lum Δy orttirma Δx ga bog'liqli bo'lib, ko'pchilik hollarda Δx bilan Δy orasidagi bog'lanish murakkab bo'ladi.

Bizga (a, b) intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a, b)$ nuqtadagi orttirmasi Δy ni

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \quad (5)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda $A \cdot \Delta x$ ga bog'liq bo'lmagan o'zgarimas, α bo'lsa Δx ga bog'liq va $\Delta x \rightarrow 0$ da $\alpha = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

Agar

$$\alpha \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$$

ekanligini hisobga olsak, u holda yuqoridagi (5) ifoda ushbu

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (6)$$

ko'rinishni oladi. Funksiya orttirmasi uchun (6) formulada $A \cdot \Delta x$ ifoda orttirmaning bosh bo'lagi deyiladi.

5-ta'rif. $f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning Δx ga nisbatan chiziqli bosh bo'lagi $A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali deb ataladi. Funksiyaning differensiali dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi:

$$dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x)$$

Asosan, $f(x) = x$ bo'lganda ushbu funksiyaning differensiali $dy = f'(x)\Delta x = \Delta x$

bo'lib, $dy = dx = \Delta x$ bo'ladi. Bu holda erkli o'zgaruvchi x ning erkli orttirmasi Δx ni uning differensiali dx bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Bu $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali quyidagi

$$dy = f'(x_0)dx = y'dx \quad (7)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ekanligini anglatadi.

Misol. Ushbu $f(x) = 2x^2 + 7x - 1$ funksiyaning qaraylik. Bu funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 7(x_0 + \Delta x) - 1 - 2x_0^2 - 7x_0 + 1 = \\ &= 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 + 7\Delta x = (4x_0 + 7)\Delta x + 2\Delta x\Delta x \end{aligned}$$

Agar $A = 4x_0 + 7$, $\alpha = \alpha(\Delta x) = 2\Delta x\Delta x$ deyilsa, u holda

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu bo'lsa berilgan funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiallanuvchi ekanligini bildiradi.



Endi yuqorida keltirilgan tushunchalar - hosila, differensial va uzluksizlik orasidagi o'zaro bog'liqlikni ko'rib chiqamiz.

Matematik analizda funksiya hosilasi, differensial va uzluksizlik tushunchalari o'zaro bog'liqdir. Ular o'rtasidagi asosiy munosabatlarni quyidagicha ifodalash mumkin:

Hosila \rightarrow Differensiallanuvchilik \rightarrow Uzluksizlik

Endi bu ketma-ketlikni ko'rib chiqamiz:

1. Funksiya biror nuqtada hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

Teorema. $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning ushbu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi za'rurli va yetarli.

Misol. Ushbu

$$f(x) = \sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$$

funksiya $x_0 = \frac{1}{2}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi, sababi bu funksiya $x_0 = \frac{1}{2}$ nuqtada chekli hosilaga ega. Haqiqatdan ham,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$$

bo'lib,

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{\arcsin \sqrt{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = (\sqrt{2})^{-1} \left(1 - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan berilgan funksiya $x_0 = \frac{1}{2}$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi.

2. Funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u uzluksiz bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u albatta shu nuqtada uzluksiz.

Differensiallanuvchilik ta'rifiga asosan:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

Bundan, $x \rightarrow x_0$ da:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Umuman olganda, differensiallanuvchi bo'lishi - funksiya grafigi tekis va uzluksiz chiziqdan iborat ekanligini bildiradi.

Uzluksizlik hosila borligini anglatmaydi. Funksiyaning uzluksiz bo'lishi hosilaning mavjudligiga kafolat bermaydi.

Misol: Bizga $f(x) = |2x - 5|$ funksiya berilgan bo'lsin.



Bu funksiyaning chapdan hosilasi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{|2x - 5| - |2 \cdot (2,5) - 5|}{x - 2,5} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{-2(2x - 5)}{2x - 5} = -2$$

O'ngdan hosilasi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{|2x - 5| - |2 \cdot (2,5) - 5|}{x - 2,5} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{2(2x - 5)}{2x - 5} = 2$$

bo'ladi. Demak, bu funksiya $x_0 = \frac{5}{2}$ nuqtada hosilaga ega emas. Bundan kelib chiqadi

bu funksiya uzluksiz lekin $x_0 = \frac{5}{2}$ nuqtada hosilaga ega emas.

Demak, asosiy bog'lanish quyidagicha:

a) Funksiyaning istalgan nuqtada differensiallanuvchi bo'lishidan uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

b) Funksiyaning istalgan nuqtada differensiallanuvchi bo'lishidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi.

c) Lekin uzluksiz funksiya har doim ham hosilaga ega bo'lavermaydi.

Shuning uchun:

Bu munosabat matematik analizning eng muhim xususiyatlaridan biri hisoblanadi. U nazariyada, shu bilan birga fizika, mexanika va iqtisodiyotdagi ko'plab amaliy masalalarni yechishda ham katta ahamiyatga ega.

References:

1. T. Azlarov, X. Mansurov "Matematik analiz" Toshkent 1994-y.
2. G.Xudayberganov, A.Vorisov, X.Mansurov, B.Shoimqulov "Matematik analizdan ma'ruzalar" "Vorish-nashriyot" MCHJ, 2010.
3. Демидович Б.П. "Сборник задач и упражнений по математическому анализу" Издательство Московского университета. 1997 г.
4. И. С. Пискунов "Дифференциальное и интегральное исчисление" Москва "Наука" главная редакция физико-математической литературы. 1985 г.